

文科数学参考解答及评分参考

一、选择题

1.【答案】B

【解析】由 $(1+2i)(1+i)=-1+3i$, 对应的点位于第二象限, 选择 B.

【命题意图】本小题设置数学课程学习情境, 设计复数运算问题, 主要考查复数的乘法运算, 复数的几何意义等基础知识; 数形结合思想, 考查数学运算等数学核心素养.

2.【答案】D

【解析】由 $A \cup B = \{-2, -1, 0, 1, 3\}$, 所以 $\complement_U(A \cup B) = \{-3, 2\}$, 所以选项 D 正确.

【命题意图】本小题设置数学课程学习情境, 设计集合运算问题, 主要考查集合的并集, 补集运算等基础知识; 考查运算求解能力, 数学运算等数学核心素养.

3.【答案】B

【解析】根据图表可知, 各月 PMI 的中位数小于 53%, A 错误; 2023 年各月, 2023 年我国综合 PMI 产出指数均大于 50%, 表明我国企业生产经营活动总体持续扩张, C 错误, B 正确; 2023 年上半年各月 PMI 比下半年各月 PMI 的波动大, 则方差也大, 故 D 错误.

【考查意图】本小题设置数学应用情境, 主要考查统计图表的应用等基础知识, 考查概率统计等思想方法, 考查数据分析等数学核心素养.

4.【答案】A

【解析】由 $a-c=(2,0)-(-3,-\sqrt{3})=(5,\sqrt{3})$, $b-c=(1,\sqrt{3})-(-3,-\sqrt{3})=(4,2\sqrt{3})$, 所以

$$\cos \langle a-c, b-c \rangle = \frac{(a-c) \cdot (b-c)}{|a-c| |b-c|} = \frac{(5,\sqrt{3}) \cdot (4,2\sqrt{3})}{\sqrt{28} \cdot \sqrt{28}} = \frac{13}{14}.$$

【命题意图】本小题设置课程学习情境, 设计平面向量运算问题, 主要考查向量的坐标运算, 数量积, 夹角公式等基础知识; 考查运算求解能力, 数形结合思想, 考查数学运算、直观想象等数学核心素养.

5.【答案】B

【解析】 $\sin \alpha = 2 \cos \alpha$, 即 $\tan \alpha = 2$, 而 $\alpha \in (\pi, 2\pi)$, 从而 $\sin \alpha = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

【命题意图】本小题设置课程学习情境, 设计三角恒等变换求值问题, 主要考查诱导公式, 同角三角函数关系等基础知识; 考查化归与转化思想, 数学运算、逻辑推理等数学核心素养.

6.【答案】C

【解析】 $i=1, 2^1=2=1\times(1+1)=2$;

$i=2, 2^2=4<2\times(2+1)=6$;

$i=3, 2^3=8<3\times(3+1)=12$;

$i=4, 2^4=16<4\times(4+1)=20$;

$i=5, 2^5=32>5\times(5+1)=30$. 故输出的 i 为 5.

【命题意图】本小题设置课程学习情境,设计程序框图问题,主要考查乘方与乘法运算,数据的大小比较,循环条件的程序框图运算等基础知识;考查运算求解能力,数据处理能力,应用意识;考查数学运算、逻辑推理等数学核心素养。

7.【答案】C

【解析】根据图象可知, $f(x)$ 的图象关于 y 轴对称, $f(x)$ 为偶函数, 且 $f(x)>0$. 对于 A, B, 均满足 $f(-x)=-f(x)$, $f(x)$ 为奇函数, 不合题意; 对于选项 C 和 D, $f(-x)=f(x)$, $f(x)$ 为偶函数, 当 $0<x<1$ 时, $f(x)=\frac{x^4-x^{-4}}{e^x+e^{-x}}<0$, D 选项不符题意, 可验证 C 项满足条件.

【命题意图】本小题主要考查函数的图象和性质等基础知识, 考查化归与转化等数学思想, 考查数学抽象、逻辑推理、直观想象等数学核心素养。

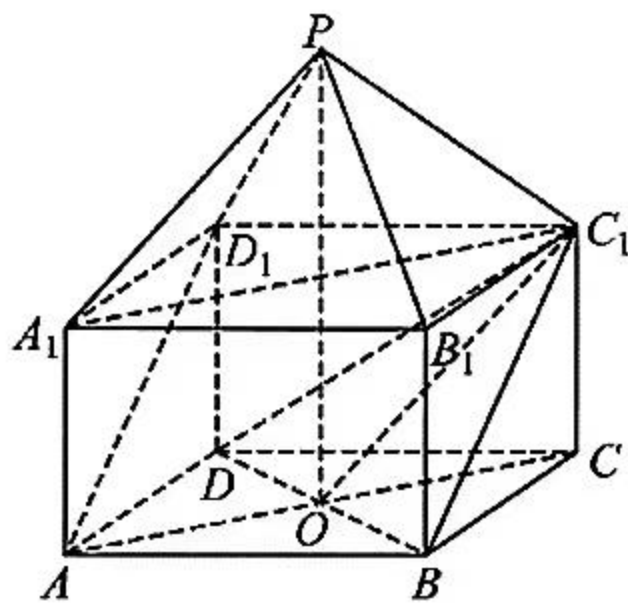
8.【答案】A

【解析】设 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$, 直线 MN 的方程为: $x=my+2$, 联立方程 $y^2=4x$ 得, $y^2-4my-8=0$, 故 $y_1y_2=-8, x_1x_2=\frac{(y_1y_2)^2}{16}=4$, 从而 $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON}=x_1x_2+y_1y_2=-4$, 故选 A.

【命题意图】本小题设置数学课程学习情境,设计直线与抛物线相交问题,主要考查抛物线的弦与向量运算,抛物线方程等基础知识;考查运算求解能力,化归与转化思想,方程思想,应用意识,考查数学抽象、逻辑推理、数学运算等数学核心素养。

9.【答案】C

【解析】如图, 因为 $PA_1=PC_1=2, A_1C_1=2\sqrt{2}, OC=CC_1=\sqrt{2}$, 在平面 ACC_1PA_1 中有 $\angle PA_1C_1=\angle A_1C_1O=\angle C_1OC=\frac{\pi}{4}$, 所以 $PA_1\parallel OC_1, PA_1\parallel$ 平面 BDC_1, PA_1 不平行于平面 ABC_1D_1 ; 同理 $PB_1\parallel OD_1, PB_1$ 不平行于平面 ABC_1D_1 ; 易得 $PO=2\sqrt{2}, PC_1=C_1O=2$, 所以 $PC_1\perp C_1O$, 又 $PC_1\perp BD, BD\cap C_1O=O$, 所以 $PC_1\perp$ 平面 BDC_1 .



【命题意图】本小题设置数学课程学习情境,设计正四棱柱与正四棱锥的组合物体问题,主要考查空间线线平行,线面垂直的判定等基础知识;考查运算求解能力,空间想象能力,推理论证能力,化归与转化思想;考查直观想象、逻辑推理等数学核心素养。

10. 【答案】B

【解析】对于①由 $f(x) = \cos |x| = \cos x$, 最小正周期为 2π , 结论①不正确; 对于②, 由 $x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$, 有 $2x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, $\cos 2x < 0$, 此时 $f(x) = |\cos 2x| = -\cos 2x$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ 单调递增, 结论②正确; 对于③, $f(x) = \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} = \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{2}$, 对称轴由 $2x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ 确定, 当 $k=1$ 时, $x = \frac{\pi}{2}$, 结论③正确.

【命题意图】本小题设置课程学习情境, 设计三角函数图象性质问题, 主要考查含绝对值的余弦函数图象, 降幂公式, 余弦函数的最小正周期, 单调区间, 图象的轴对称等基础知识; 考查逻辑推理能力, 数形结合思想, 化归与转化思想; 考查数学运算、逻辑推理等数学核心素养.

11. 【答案】D

【解析】设 $|AF_2| = 2m$, 则 $|AB| = 3m, |BF_2| = 5m$, 由于 F_1, F_2 关于 y 轴对称, 故 $|BF_1| = |BF_2| = 5m$, 又因为 $\overrightarrow{F_1A} \perp \overrightarrow{AB}$, 所以 $|AF_1| = 4m, |F_1F_2| = 2\sqrt{5}m$, 所以 $2a = 2m, 2c = 2\sqrt{5}m$, 所以 $e = \sqrt{5}$, 故选 D.

【命题意图】本小题设置数学课程学习情境, 设计双曲线问题, 主要考查双曲线的方程与性质, 焦点弦的性质, 向量, 双曲线的离心率等基础知识; 考查运算求解能力, 数形结合思想, 应用意识, 考查数学运算、直观想象等数学核心素养.

12. 【答案】C

【解析】依题意, $a \neq 0, x > 0$, 不等式化为 $\frac{\ln x + 1}{x^2} \leq a \left(x - \frac{b}{a}\right)$. 设 $f(x) = \frac{\ln x + 1}{x^2}$, 则 $f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x^2 - 2x(\ln x + 1)}{x^4} = \frac{-1 - 2\ln x}{x^3}$, 当 $x \in (0, e^{-\frac{1}{2}})$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增; 当 $x \in (e^{-\frac{1}{2}}, +\infty)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减, 所以, $f(x)$ 在 $x = e^{-\frac{1}{2}}$ 处取得极大值, 也即最大值 $\frac{e}{2}$. 又 $x > e^{-\frac{1}{2}}$ 时, $f(x) > 0$. 由题知不等式 $\frac{\ln x + 1}{x^2} \leq a \left(x - \frac{b}{a}\right)$ 恒成立, 所以 $y = a \left(x - \frac{b}{a}\right)$ 的图象恒在 $f(x)$ 的图象的上方, 显然 $a < 0$ 不符题意; 当 $a > 0$ 时, $\frac{b}{a}$ 为直线 $y = a \left(x - \frac{b}{a}\right)$ 的横截距, 其最大值为 $f(x)$ 的横截距, 再令 $f(x) = 0$, 可得 $x = \frac{1}{e}$, 且当直线 $y = a \left(x - \frac{b}{a}\right)$ 与 $f(x)$ 在点 $\left(\frac{1}{e}, 0\right)$ 处相切时, 横截距 $\frac{b}{a}$ 取得最大值. 此时, 切线方程为 $y = e^3 \left(x - \frac{1}{e}\right)$, $a = e^3, b = e^2$, 所以 $\frac{b}{a}$ 取得最大值为 $\frac{1}{e}$.

【命题意图】本小题设置课程学习情境,主要考查导数的应用等基础知识,考查化归与转化等数学思想,考查数学抽象、逻辑推理、数学运算、直观想象等数学核心素养。

二、填空题

13.【答案】-6

【解析】作出约束条件表示的可行域为以 $A(4,6), B(0,2), C(1,0)$ 三点为顶点的 $\triangle ABC$ 及其内部,作出直线 $-3x+y=0$ 并平移,当直线 $y=3x+z$ 经过点 $A(4,6)$ 时,在 y 轴上的截距最小,此时目标函数 $z=-3x+y$ 取得最小值 $z_{\min}=-3\times 4+6=-6$.

【命题意图】本小题设置课程学习情境,设计简单的线性规划问题,主要考查不等式组的解法,约束条件表示的可行域,直线平移及几何意义等基础知识;考查运算求解能力,数形结合思想,化归与转化思想;考查数学运算、直观想象等数学核心素养

14.【答案】 $\frac{3\sqrt{15}}{4}$

【解析】由余弦定理有 $\cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC} = \frac{4^2 + 3^2 - 2^2}{2 \times 4 \times 3} = \frac{7}{8}$, 所以 $\sin A = \frac{\sqrt{15}}{8}$, 所以

$$\triangle ABC \text{ 的面积 } S = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A = \frac{1}{2} \times 4 \times 3 \times \frac{\sqrt{15}}{8} = \frac{3\sqrt{15}}{4}.$$

【命题意图】本小题设置课程学习情境,设计解三角形问题,主要考查余弦定理,同角间的三角函数关系,三角形面积等基础知识;考查数形结合思想,化归与转化思想;考查数学运算、逻辑推理等数学核心素养。

15.【答案】-2

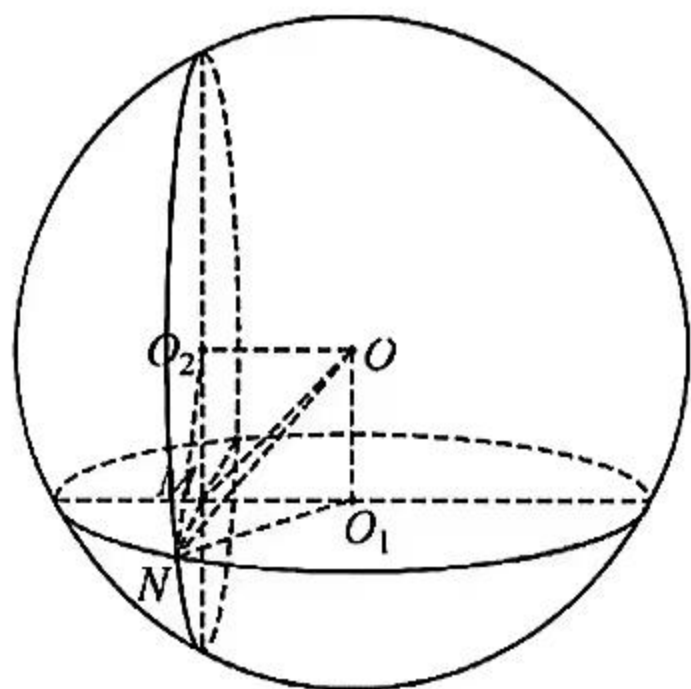
【解析】函数 $f(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的奇函数,且当 $x < 0$ 时, $f(x) = -e^{ax}$, 由于 $\ln 3 > 0$, 所以 $f(\ln 3) = -f(-\ln 3) = e^{-a \ln 3} = e^{\ln 3^{-a}} = 3^{-a} = 9$, 所以 $a = -2$.

【命题意图】本小题设置课程学习情境,主要考查函数奇偶性等基本性质、考查化归与转化等数学思想;考查数学抽象、逻辑推理、数学运算等数学核心素养。

16.【解析】如图,设 $OO_1 = O_2M = d$, $OM = O_1O_2 = \frac{\sqrt{6}}{2}r_1$, 则在

$\triangle O_1MO$ 中, $\frac{3}{2}r_1^2 = MO_1^2 + d^2$, 在 $\triangle O_2MN$ 中, $2r_1^2 = d^2 + MN^2$, 两式相减,得 $MN^2 = \frac{r_1^2}{2} + MO_1^2$, 在 $\triangle O_1MN$ 中, $r_1^2 = MN^2 + MO_1^2$, 所以 $r_1^2 = \frac{r_1^2}{2} + 2MO_1^2$, 可得 $\lambda = 2$.

【命题意图】本小题设置数学课程学习情境,设计球与截面问



题,主要考查球被平面所截后相关元素的关系,空间线线、线面位置关系,与球相关的量的运算等基础知识;考查运算求解能力,空间想象能力,推理论证能力;考查数学运算素养,直观想象素养,逻辑推理等数学核心素养。

三、解答题

17.【解析】(1)依题意, $\bar{x} = \frac{1+2+3+4+5}{5} = 3$, 1 分

$$\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2 = (1-3)^2 + (2-3)^2 + (3-3)^2 + (4-3)^2 + (5-3)^2 = 10, \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\text{则 } r = \frac{\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^5 (y_i - \bar{y})^2}} = \frac{25}{\sqrt{10} \times \sqrt{65}} = \frac{25}{10 \times \sqrt{6.5}} \approx \frac{25}{10 \times 2.55} \approx 0.98, \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

则 $r > 0.75$, 故变量 y 与 x 的相关程度很强. 5 分

(2) 令变量 y 与 x 的线性回归方程为 $\hat{y} = \hat{a} + \hat{b}x$.

$$\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^5 (y_i - \bar{y})(x_i - \bar{x})}{\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2} = \frac{25}{10} = 2.5, \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } \hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x} = 70.5 - 2.5 \times 3 = 63, \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

所以, 变量 y 关于 x 的回归方程为 $y = 2.5x + 63$ 10 分

2024 年, 即 $x = 6$ 时, $y = 2.5 \times 6 + 63 = 78$ (亿元).

所以, 该公司 2024 年利润 y 的预报值为 78 (亿元). 12 分

【命题意图】本小题设置生活实践情境, 主要考查回归分析的基本思想及其初步应用, 考查统计基本思想以及抽象概括、数据处理等能力和应用意识; 考查数学运算、数学建模等数学核心素养。

18.【解析】(1) 由 $2S_n = 3a_n - 3$,

当 $n = 1$ 时, $2a_1 = 3a_1 - 3$, 得 $a_1 = 3$, 2 分

当 $n \geq 2$ 时, $2a_n = 2S_n - 2S_{n-1} = 3a_n - 3 - (3a_{n-1} - 3)$,

整理得, $a_n = 3a_{n-1}$,

又 $a_{n-1} \neq 0$, 所以 $\frac{a_n}{a_{n-1}} = 3$, 5 分

所以数列 $\{a_n\}$ 是首项为 3, 公比为 3 的等比数列,

所以 $a_n = 3^n$ 6 分

(2)由(1)可得, $b_n = 3^n \log_3 a_n = n \cdot 3^n$, 7 分

所以 $T_n = 1 \times 3 + 2 \times 3^2 + 3 \times 3^3 + \cdots + n \cdot 3^n$,

$3T_n = 1 \times 3^2 + 2 \times 3^3 + 3 \times 3^4 + \cdots + n \cdot 3^{n+1}$,

两式相减得 $-2T_n = 3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^n - n \cdot 3^{n+1}$ 9 分

$$= \frac{3(1-3^n)}{1-3} - n \cdot 3^{n+1}$$

$$= \left(\frac{1}{2} - n\right) \cdot 3^{n+1} - \frac{3}{2}.$$

所以 $T_n = \left(\frac{n}{2} - \frac{1}{4}\right) \cdot 3^{n+1} + \frac{3}{4} (n \in \mathbb{N}^*)$ 12 分

【命题意图】本小题设置课程学习情境,设计数列问题,主要考查数列的前 n 项和与通项公式,等比数列的性质,错位相减法求数列的和等基础知识;考查运算求解能力,推理论证能力,化归与转化思想;考查数学运算素养,逻辑推理等数学核心素养,应用意识。

19.【解析】(1)如图,取 AB, CD 的中点 M, N , 连接 ME, EN, NF, FM .

因为 $FN \perp DC$, 平面 $FCD \perp$ 平面 $ABCD$, 平面 $FCD \cap$ 平面 $ABCD = CD$,

所以 $FN \perp$ 平面 $ABCD$ 2 分

同理, $EM \perp$ 平面 $ABCD$.

所以 $FN \parallel ME$ 3 分

又 $\triangle AEB$ 和 $\triangle CFD$ 是等腰直角三角形, 所以 $FN = ME$,

四边形 $MENF$ 为平行四边形, 所以 $MF \parallel EN$,

又因为 $AB \parallel CD, AB \cap MF = M, CD \cap NE = N$,

所以平面 $ABF \parallel$ 平面 CDE 5 分

(2)如图, 连接 MN , 过 M 作 $MH \perp NE$ 于 H .

因为 $EM \perp$ 平面 $ABCD, DC \subset$ 平面 $ABCD$, 所以 $DC \perp EM$.

因为 $DA \perp AB$, 平面 $ABE \perp$ 平面 $ABCD$, 平面 $ABE \cap$ 平面 $ABCD = AB$,

所以 $DA \perp$ 平面 ABE , 所以 $DA \perp AE$ 7 分

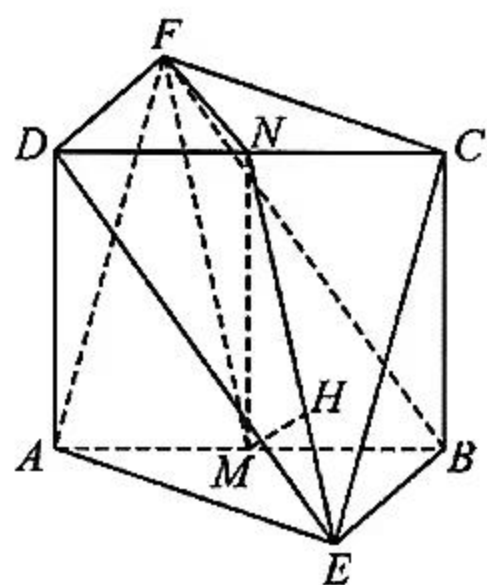
同理可得, $CB \perp BE$.

又因为 $AD = BC, EA = EB$,

所以 $\triangle ADE \cong \triangle BCE$, 所以 $ED = EC$ 8 分

因为 N 是 DC 的中点, 所以 $DC \perp NE$,

又因为 $NE \cap EM = E$, 所以 $DC \perp$ 平面 MEN ,



所以 $MH \perp DC$.

因为 $MH \perp NE$, $NE \cap DC = N$, 所以 $MH \perp$ 平面 DCE .

因为 $M \in$ 平面 ABF , 所以 MH 是平面 ABF 与平面 CDE 的距离. 10 分

在 $Rt\triangle MEN$ 中, 易得 $MN=2$, $ME=\sqrt{2}$, $NE=\sqrt{6}$,

所以, $MH = \frac{ME \cdot MN}{NE} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. 即平面 ABF 与平面 CDE 的距离为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 12 分

【命题意图】本小题设置数学课程学习情境, 设计立体几何问题, 主要考查空间线线、线面平行的判定, 线线、线面垂直的判定与性质, 点到面的距离等基础知识; 考查运算求解能力, 推理论证能力, 空间想象能力; 考查逻辑推理, 直观想象等数学核心素养。

20. **【解析】**(1) 由题知, $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 则 $b = \frac{1}{2}a$,

故椭圆 C 的方程可表示为 $\frac{x^2}{4b^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 2 分

由点 $(\sqrt{3}, \frac{1}{2})$ 在椭圆 C 上知, $\frac{3}{4b^2} + \frac{1}{4b^2} = 1$, 故 $b=1$, $a=2$,

即椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 4 分

(2) 由(1)知 $A_1(-2, 0)$, $A_2(2, 0)$, 设 $P(4, m)$, $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$.

则 $PA_1: y = \frac{m}{6}(x+2)$, $PA_2: y = \frac{m}{2}(x-2)$ 5 分

联立直线 PA_1 与椭圆 C 方程得, $(m^2+9)x^2 + 4m^2x + 4m^2 - 36 = 0$,

故 $-2x_1 = \frac{4m^2-36}{m^2+9}$, $x_1 = \frac{-2m^2+18}{m^2+9}$, $y_1 = \frac{m}{6}(x_1+2) = \frac{6m}{m^2+9}$ 7 分

联立直线 PA_2 与椭圆 C 方程得, $(m^2+1)x^2 - 4m^2x + 4m^2 - 4 = 0$,

故 $2x_2 = \frac{4m^2-4}{m^2+1}$, $x_2 = \frac{2m^2-2}{m^2+1}$, $y_2 = \frac{m}{2}(x_2+2) = \frac{-2m}{m^2+1}$ 9 分

取 $Q(1, 0)$,

则 $\overrightarrow{QM} = (x_1-1, y_1) = (\frac{-3m^2+9}{m^2+9}, \frac{6m}{m^2+9})$,

$\overrightarrow{QN} = (x_2-1, y_2) = (\frac{m^2-3}{m^2+1}, \frac{-2m}{m^2+1})$ 11 分

从而 $(x_1-1)y_2 - (x_2-1)y_1 = \frac{-3m^2+9}{m^2+9} \cdot \frac{-2m}{m^2+1} - \frac{m^2-3}{m^2+1} \cdot \frac{6m}{m^2+9} = 0$,

故 $\overrightarrow{QM} \parallel \overrightarrow{QN}$, 即直线 MN 过定点 $(1, 0)$ 12 分

【命题意图】本小题设置数学课程学习情境，设计直线与椭圆相交问题，主要考查椭圆的方程，直线与椭圆的位置关系，直线过定点等基础知识；考查运算求解能力，推理论证能力，数形结合思想，方程思想；考查数学运算、逻辑推理等数学核心素养，应用意识。

21. 【解析】(1) 由于 $f(x) = x \ln x - ax^2 - 2x$ ，则 $f'(x) = \ln x - 2ax - 1$ 。

因为 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增，

所以 $x > 1$ ， $f'(x) \geq 0$ 恒成立，即 $\ln x - 2ax - 1 \geq 0$ ，也即 $2a \leq \frac{\ln x - 1}{x}$ 恒成立，

令 $g(x) = \frac{\ln x - 1}{x}$ ($x > 1$)，则 $g'(x) = \frac{2 - \ln x}{x^2}$ ($x > 1$)，

可知 $1 < x < e^2$ 时， $g'(x) > 0$ ， $g(x)$ 单调递增，此时 $-1 < g(x) < \frac{1}{e^2}$ ；

当 $x > e^2$ 时， $g'(x) < 0$ ， $g(x)$ 单调递减，此时 $0 < g(x) < \frac{1}{e^2}$ ，

故 $x > 1$ 时， $g(x) \in \left(-1, \frac{1}{e^2}\right]$ ，所以 $2a \leq -1$ ，即 $a \leq -\frac{1}{2}$ ，

所以， $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增时， a 的取值范围是 $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right]$ 。

(2) ① 由 (1) 知， $f'(x) = \ln x - 2ax - 1$ ，

因为 $f(x)$ 有两个极值点 x_1, x_2 ， $f'(x) = 0$ 即 $2a = \frac{\ln x - 1}{x}$ 有两个实数根 x_1, x_2 ，

由 (1) 知 $g(x) = \frac{\ln x - 1}{x}$ ， $g'(x) = \frac{2 - \ln x}{x^2}$ ，

可知 $0 < x < e^2$ 时， $g'(x) > 0$ ， $g(x)$ 单调递增，此时 $g(x) < \frac{1}{e^2}$ ；当 $x > e^2$ 时， $g'(x) < 0$ ， $g(x)$ 单

调递减，此时 $0 < g(x) < \frac{1}{e^2}$ ，

所以 $f'(x) = 0$ 即 $2a = \frac{\ln x - 1}{x}$ 有两个实数根时， $0 < 2a < \frac{1}{e^2}$ 。

则 $f(x)$ 有两个极点时， $a \in \left(0, \frac{1}{2e^2}\right)$ 。 8 分

② 由 $\begin{cases} \ln x_1 - 2ax_1 - 1 = 0, \\ \ln x_2 - 2ax_2 - 1 = 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} \ln x_1 = 2ax_1 + 1, \\ \ln x_2 = 2ax_2 + 1, \end{cases}$ 得 $2a = \frac{\ln x_1 - \ln x_2}{x_1 - x_2}$ ，

要证明 $x_1 x_2^2 > 16e^3$ ，只需证明 $\ln x_1 + 2\ln x_2 > 4\ln 2 + 3$ 。

由题， $\ln x_1 + 2\ln x_2 = 2a(x_1 + 2x_2) + 3 = (x_1 + 2x_2) \cdot \frac{\ln x_1 - \ln x_2}{x_1 - x_2} + 3 = \left(\frac{x_1}{x_2} + 2\right) \cdot \frac{\ln \frac{x_1}{x_2}}{\frac{x_1}{x_2} - 1} + 3$ ，

令 $t = \frac{x_1}{x_2} (x_1 > 4x_2)$, 则 $t > 4$,

欲证明 $\ln x_1 + 2\ln x_2 > 4\ln 2 + 3$, 也即证明 $(t+2) \cdot \frac{\ln t}{t-1} > 4\ln 2 (t > 4)$, 10 分

只需证明 $\ln t - 4\ln 2 \cdot \frac{t-1}{t+2} > 0 (t > 4)$ 即可,

令 $h(t) = \ln t - 4\ln 2 \cdot \frac{t-1}{t+2} (t > 4)$,

可知 $h'(t) = \frac{1}{t} - 4\ln 2 \cdot \frac{3}{(t+2)^2} = \frac{t^2 + 4t + 4 - 12\ln 2 \cdot t}{t(t+2)^2} = \frac{t + 4 + \frac{4}{t} - 12\ln 2}{t^2(t+2)^2},$

则 $\varphi(t) = t + 4 + \frac{4}{t} - 12\ln 2$ 在 $t > 4$ 时单调递增, 故 $\varphi(t) > \varphi(4) = 9 - 12\ln 2 > 0$, 则 $h'(t) > 0$,

令 $h(t)$ 在 $t > 4$ 时单调递增, 则 $h(t) > h(4) = \ln 4 - 4 \times \frac{1}{2} \times \ln 2 = 0$,

故 $(t+2) \cdot \frac{\ln t}{t-1} > 4\ln 2 (t > 4)$, 即 $\ln x_1 + 2\ln x_2 > 4\ln 2 + 3$,

所以 $x_1 x_2^2 > 16e^3$ 12 分

【命题意图】本小题设置探究创新情境, 主要考查导数几何意义、极值、函数的零点, 函数与导数的综合应用等基础知识, 考查化归与转化、函数与方程等数学思想; 考查数学抽象、逻辑推理、数学运算等数学核心素养。

选考题

22. **【解析】**(1) 由题知, $\odot C$ 的直角坐标方程为 $C: (x-2)^2 + (y-2)^2 = 4$, 2 分

即 $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 4 = 0$,

故 $\odot C$ 的极坐标方程为 $\rho^2 - 4\rho\cos\theta - 4\rho\sin\theta + 4 = 0$ 4 分

(2) 设 $PQ: \theta = \alpha, \alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$, $OP = \rho_1, OQ = \rho_2$.

联立直线 PQ 和圆 C 的方程得:

$\rho^2 - 4\rho\cos\alpha - 4\rho\sin\alpha + 4 = 0$, 6 分

则 $\rho_1 + \rho_2 = 4(\cos\alpha + \sin\alpha), \rho_1\rho_2 = 4$ 7 分

故 $|OP| + |OQ| = \rho_1 + \rho_2 = 4(\cos\alpha + \sin\alpha) = 4\sqrt{2}\sin(\alpha + \frac{\pi}{4})$, 9 分

故当 $\alpha = \frac{\pi}{4}$ 时, $|OP| + |OQ|$ 取得最大值 $4\sqrt{2}$ 10 分

【命题意图】本小题设置课程数学情境, 设计极坐标问题, 主要考查直角坐标方程与极坐标方

程的互化,直线与圆的位置关系,弦长等基础知识;考查运算求解能力,推理论证能力,应用意识。

23.【解析】(1)当 $x < -2$ 时, $f(x) = -3x - 2 > 4$; 当 $-2 \leq x \leq 2$ 时, $f(x) = x + 6 \in [4, 8]$; 当 $x > 2$ 时, $f(x) = 3x + 2 > 8$. 则 $f(x)$ 的最小值为 4. 2 分

由于对任意 $x \in \mathbf{R}$, 使得 $f(x) \geq a^2 - 3a$ 恒成立,

所以 $4 \geq a^2 - 3a$, 解得 $-1 \leq a \leq 4$,

故 a 的取值范围是 $[-1, 4]$ 5 分

(2) 由(1)可知 $f(x)$ 的最小值为 $M=4$, 则 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{4}{c} = 4$,

则 $4(a+b+c) = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{4}{c}\right)(a+b+c) = 6 + \frac{b}{a} + \frac{c}{a} + \frac{a}{b} + \frac{c}{b} + \frac{4a}{c} + \frac{4b}{c}$ 6 分

$= 6 + \left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b}\right) + \left(\frac{c}{b} + \frac{4b}{c}\right) + \left(\frac{c}{a} + \frac{4a}{c}\right)$ 8 分

$\geq 6 + 2\sqrt{\frac{b}{a} \cdot \frac{a}{b}} + 2\sqrt{\frac{c}{b} \cdot \frac{4b}{c}} + 2\sqrt{\frac{c}{a} \cdot \frac{4a}{c}}$

$= 16$,

当且仅当 $\frac{b}{a} = \frac{a}{b}, \frac{c}{b} = \frac{4b}{c}, \frac{c}{a} = \frac{4a}{c}$ 且 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{4}{c} = 4$ 取“=”, 即 $a=b=1, c=2$ 取“=”.

所以 $a+b+c \geq 4$ 10 分

【命题意图】本小题设置课程学习情境, 主要考查均值不等式应用、不等式的证明方法等基础知识, 考查分类与整合思想, 考查运算求解、推理论证等数学能力。