

秘密 ★ 启用前

眉山市高中 2024 届第三次诊断性考试

数 学 (文科)

本试卷满分 150 分,考试时间 120 分钟。

注意事项:

1. 答卷前,考生务必将自己的姓名、座位号和准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其它答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

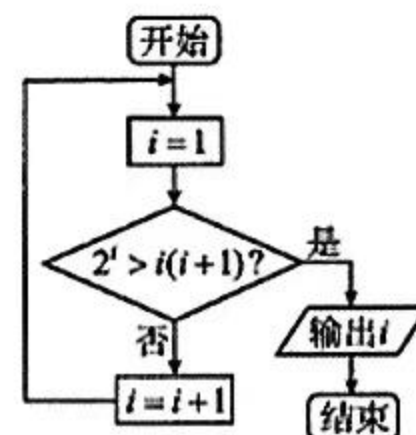
一、选择题:本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 在复平面内, $(1+2i)(1+i)$ 对应的点位于
 - A. 第一象限
 - B. 第二象限
 - C. 第三象限
 - D. 第四象限
2. 设全集 $U = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, 集合 $A = \{-2, -1, 0, 1\}$, $B = \{-1, 1, 3\}$, 则 $\complement_U(A \cup B) =$
 - A. $\{3\}$
 - B. $\{-3, -1, 1, 2, 3\}$
 - C. $\{-3, -2, 0, 2, 3\}$
 - D. $\{-3, 2\}$
3. 采购经理指数(PMI),是国际上通用的监测宏观经济走势的先行性指数之一,具有较强的预测、预警作用。综合 PMI 产出指数是 PMI 指标体系中反映当期全行业(制造业和非制造业)产出变化情况的综合指数,指数高于 50% 时,反映企业生产经营活动较上月扩张;低于 50%,则反映企业生产经营活动较上月收缩。2023 年我国综合 PMI 产出指数折线图如下图所示:



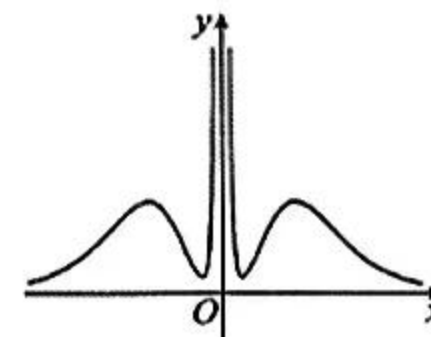
根据该折线图判断,下列结论正确的是

- A. 2023 年各月综合 PMI 产出指数的中位数高于 53%
 - B. 2023 年各月,我国企业生产经营活动景气水平持续扩张
 - C. 2023 年第 3 月至 12 月,我国企业生产经营活动景气水平持续收缩
 - D. 2023 年上半年各月综合 PMI 产出指数的方差小于下半年各月综合 PMI 产出指数的方差
4. 已知向量 $a = (2, 0)$, $b = (1, \sqrt{3})$, $c = (-3, -\sqrt{3})$, 则 $\cos \langle a - c, b - c \rangle =$
 - A. $\frac{13}{14}$
 - B. $\frac{3\sqrt{3}}{14}$
 - C. $-\frac{3\sqrt{3}}{14}$
 - D. $-\frac{13}{14}$
 5. 已知 $\alpha \in (\pi, 2\pi)$, $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = 2\cos\alpha$, 则 $\sin\alpha =$
 - A. $-\frac{\sqrt{5}}{5}$
 - B. $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$
 - C. $\frac{\sqrt{5}}{5}$
 - D. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$
 6. 执行如图所示的程序框图,则输出的 $i =$



- A. 3
 - B. 4
 - C. 5
 - D. 6
7. 下列各选项对应的函数中,其大致图象是上图所示的一项为

- A. $f(x) = \frac{x^4 + x^{-4}}{e^x - e^{-x}}$
- B. $f(x) = \frac{x^4 - x^{-4}}{e^x - e^{-x}}$
- C. $f(x) = \frac{x^4 + x}{e^x + e^{-x}}$
- D. $f(x) = \frac{x^4 - x^{-4}}{e^x + e^{-x}}$



8. 设 O 为坐标原点,过点 $(2, 0)$ 的直线与抛物线 $C: y^2 = 4x$ 的交于 M, N 两点,则 $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} =$
 - A. 4
 - B. -2
 - C. 0
 - D. 2

根据该折线图判断,下列结论正确的是

- A. 2023 年各月综合 PMI 产出指数的中位数高于 53%
- B. 2023 年各月,我国企业生产经营活动景气水平持续扩张
- C. 2023 年第 3 月至 12 月,我国企业生产经营活动景气水平持续收缩
- D. 2023 年上半年各月综合 PMI 产出指数的方差小于下半年各月综合 PMI 产出指数的方差

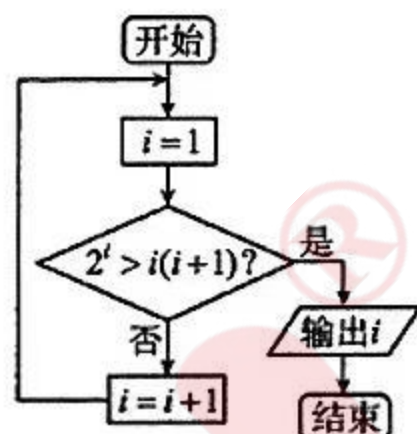
4. 已知向量 $a=(2,0)$, $b=(1,\sqrt{3})$, $c=(-3,-\sqrt{3})$, 则 $\cos \langle a-c, b-c \rangle =$

- A. $\frac{13}{14}$
- B. $\frac{3\sqrt{3}}{14}$
- C. $-\frac{3\sqrt{3}}{14}$
- D. $-\frac{13}{14}$

5. 已知 $\alpha \in (\pi, 2\pi)$, $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = 2\cos \alpha$, 则 $\sin \alpha =$

- A. $-\frac{\sqrt{5}}{5}$
- B. $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$
- C. $\frac{\sqrt{5}}{5}$
- D. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

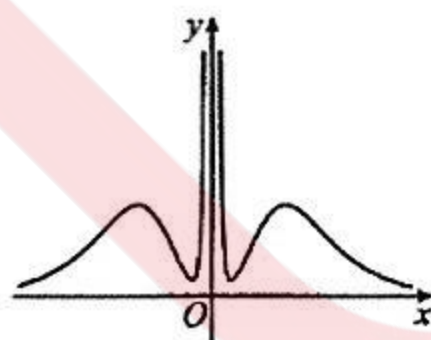
6. 执行如图所示的程序框图,则输出的 $i =$



- A. 3
- B. 4
- C. 5
- D. 6

7. 下列各选项对应的函数中,其大致图象是上图所示的一项为

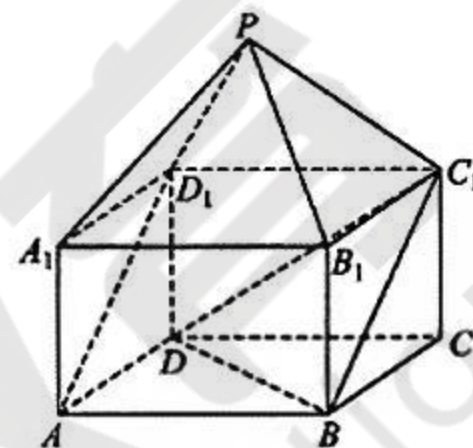
- A. $f(x) = \frac{x^4 + x^{-4}}{e^x - e^{-x}}$
- B. $f(x) = \frac{x^4 - x^{-4}}{e^x - e^{-x}}$
- C. $f(x) = \frac{x^4 + x^{-4}}{e^x + e^{-x}}$
- D. $f(x) = \frac{x^4 - x^{-4}}{e^x + e^{-x}}$



8. 设 O 为坐标原点,过点 $(2,0)$ 的直线与抛物线 $C: y^2 = 4x$ 的交于 M, N 两点,则 $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} =$

- A. -4
- B. -2
- C. 0
- D. 4

9. 如图,该组合体由一个正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 和一个正四棱锥 $P-A_1B_1C_1D_1$ 组合而成,已知 $AB=2$, $AA_1=\sqrt{2}$, $PA_1=2$, 则



- A. $PA_1 \parallel$ 平面 ABC_1D_1
- B. $PB_1 \parallel$ 平面 ABC_1D_1
- C. $PC_1 \perp$ 平面 BDC_1
- D. $PD_1 \perp$ 平面 BDC_1

10. 给出下述三个结论:①函数 $f(x) = \cos |x|$ 的最小正周期为 π ;②函数 $f(x) = |\cos 2x|$ 在区间 $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$ 单调递增;③函数 $f(x) = \cos^2 x$ 的图象关于直线 $x = \frac{\pi}{2}$ 对称. 其中所有正确结论的编号是

- A. ①②③
- B. ②③
- C. ①③
- D. ②

11. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 . 点 A 在 C 上, 点 B 在 y 轴上, $\overrightarrow{AB} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AF_2}$, $F_1A \perp AB$, 则 C 的离心率为

- A. $\frac{3\sqrt{2}}{4}$
- B. $\sqrt{2}$
- C. $\sqrt{3}$
- D. $\sqrt{5}$

12. 若关于 x 的不等式 $\ln x \leq ax^3 - bx^2 - 1 (a \neq 0)$ 恒成立, 则 $\frac{b}{a}$ 的最大值为

- A. $\frac{1}{e^2}$
- B. $\frac{2}{e^2}$
- C. $\frac{1}{e}$
- D. $\frac{2}{e}$

二、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分。

13. 若 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x-y+2 \geq 0, \\ 2x-y-2 \leq 0, \\ 2x+y-2 \geq 0, \end{cases}$ 则 $z = -3x + y$ 的最小值为_____.

14. 已知 $\triangle ABC$ 的三边长 $AB = 4$ cm, $BC = 2$ cm, $AC = 3$ cm, 则 $\triangle ABC$ 的面积为 _____ cm^2 .

15. 已知函数 $f(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的奇函数, 且当 $x < 0$ 时, $f(x) = -e^x$. 若 $f(\ln 3) = 9$, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.

16. 已知相互垂直的两个平面分别截球 O 的球面, 得到两个圆 O_1, O_2 , 其半径分别为 r_1, r_2 , 若 $O_1O_2 = \frac{\sqrt{6}}{2}r_1, r_2 = \sqrt{2}r_1$, 两圆的公共弦的中点为 M , 设 $r_1 = \lambda MO_1$, 则 $\lambda = \underline{\hspace{2cm}}$.

三、解答题: 共 70 分。解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤。第 17~21 题为必考题, 每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题, 考生依据要求作答。

(一) 必考题: 共 60 分。

17. (12 分)

某公司为改进生产, 现对近 5 年来生产经营情况进行分析, 收集了近 5 年的利润 y (单位: 亿元) 与年份代码 x 共 5 组数据 (其中年份代码 $x = 1, 2, 3, 4, 5$ 分别指 2019 年, 2020 年, $\dots$, 2023 年), 并得到如下值: $\bar{y} = 70.5, \sum_{i=1}^5 (y_i - \bar{y})^2 = 65,$

$$\sum_{i=1}^5 (y_i - \bar{y})(x_i - \bar{x}) = 25.$$

(1) 若用线性回归模型拟合变量 y 与 x 的相关关系, 计算该样本相关系数 r , 并判断变量 y 与 x 的相关程度 (r 精确到 0.01);

(2) 求变量 y 关于 x 的线性回归方程, 并求 2024 年利润 y 的预报值。

附: ① $\sqrt{6.5} \approx 2.55$;

② 若 $|r| \geq 0.75$, 相关程度很强; $0.3 \leq |r| < 0.75$, 相关程度一般; $|r| \leq 0.3$, 相关程度较弱;

③ 一组数据 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$, 其回归直线 $\hat{y} = \hat{a} + \hat{b}x$ 的斜率和截距的

$$\text{最小二乘估计分别为 } \hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}, \hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}; \text{ 相关系数 } r =$$

$$\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}.$$

18. (12 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $2S_n = 3a_n - 3, n \in \mathbf{N}^*$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

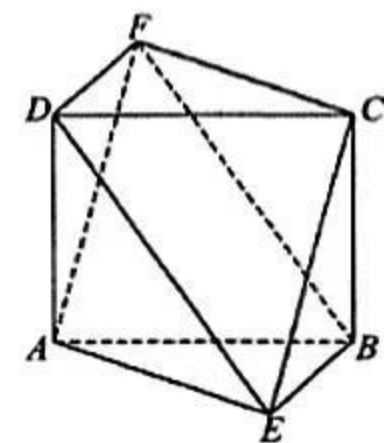
(2) 若 $b_n = 3^n \log_3 a_n$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

19. (12 分)

如图, 在多面体 $ABCDEF$ 中, 四边形 $ABCD$ 为矩形, 平面 $FCD \perp$ 平面 $ABCD$, 平面 $EAB \perp$ 平面 $ABCD$, $\triangle AEB, \triangle CFD$ 是等腰直角三角形且 $\angle DFC = \angle BEA = \frac{\pi}{2}, AB = 2\sqrt{2}, AD = 2$.

(1) 证明: 平面 $ABF \parallel$ 平面 CDE ;

(2) 求平面 ABF 与平面 CDE 的距离.



20. (12 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率是 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 左、右顶点分别为 A_1, A_2 , 点

$(\sqrt{3}, \frac{1}{2})$ 在椭圆 C 上;

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 若点 P 为直线 $l: x = 4$ 上的动点, 直线 PA_1, PA_2 分别交椭圆 C 于 M, N 两点, 证明: 直线 MN 过定点.

21. (12 分)

已知函数 $f(x) = x \ln x - ax^2 - 2x$.

(1) 若 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 求 a 的取值范围;

(2) 若 $f(x)$ 有两个不同极值点 x_1, x_2 .

① 求 a 的取值范围;

② 当 $x_1 > 4x_2$ 时, 证明: $x_1 x_2^2 > 16e^3$.

18. (12 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $2S_n = 3a_n - 3, n \in \mathbb{N}^*$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

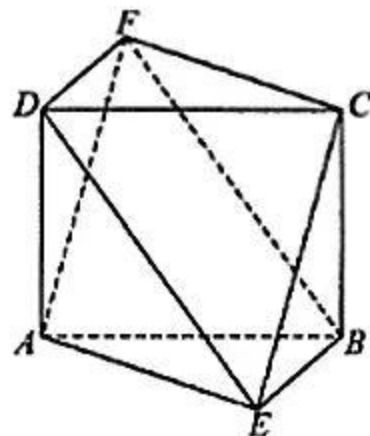
(2) 若 $b_n = 3^n \log_3 a_n$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

19. (12 分)

如图, 在多面体 $ABCDEF$ 中, 四边形 $ABCD$ 为矩形, 平面 $FCD \perp$ 平面 $ABCD$, 平面 $EAB \perp$ 平面 $ABCD$, $\triangle AEB, \triangle CFD$ 是等腰直角三角形且 $\angle DFC = \angle BEA = \frac{\pi}{2}$, $AB = 2\sqrt{2}, AD = 2$.

(1) 证明: 平面 $ABF \parallel$ 平面 CDE ;

(2) 求平面 ABF 与平面 CDE 的距离.



20. (12 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率是 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 左、右顶点分别为 A_1, A_2 , 点

$(\sqrt{3}, \frac{1}{2})$ 在椭圆 C 上;

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 若点 P 为直线 $l: x = 4$ 上的动点, 直线 PA_1, PA_2 分别交椭圆 C 于 M, N 两点, 证明: 直线 MN 过定点.

21. (12 分)

已知函数 $f(x) = x \ln x - ax^2 - 2x$.

(1) 若 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 求 a 的取值范围;

(2) 若 $f(x)$ 有两个不同极值点 x_1, x_2 .

① 求 a 的取值范围;

② 当 $x_1 > 4x_2$ 时, 证明: $x_1 x_2^2 > 16e^3$.

(二) 选考题: 共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答, 如果多做, 则按所做的第一题记分。

22. [选修 4-4: 坐标系与参数方程] (10 分)

在直角坐标系 xOy 中, $\odot C$ 的圆心为 $C(2, 2)$, 半径为 2, 以坐标原点 O 为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系.

(1) 求 $\odot C$ 的极坐标方程;

(2) 过点 O 的直线交 $\odot C$ 于 P, Q 两点, 求 $|OP| + |OQ|$ 的最大值.

23. [选修 4-5: 不等式选讲] (10 分)

已知函数 $f(x) = |2-x| + 2|x+2|$.

(1) 若对任意 $x \in \mathbb{R}$, 使得 $f(x) \geq a^2 - 3a$ 恒成立, 求 a 的取值范围;

(2) 令 $f(x)$ 的最小值为 M . 若正数 a, b, c 满足 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{4}{c} = M$, 求证: $a + b + c \geq 4$.