

2024 年南充三诊理科数学

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求。

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
B	C	A	A	C	D	D	A	B	C	D	B

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。需把答案填到答题卡上。

13. $[-4, 1) \cup (1, 4]$

14. -10

15. $(1, 1 + \sqrt{3})$

16. $\frac{8\sqrt{3}}{3}$

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。第 17—21 题是必考题必须作答。第 22, 23 题是选考题，根据要求作答。

17. 解：(1) $\bar{x} = \frac{1+2+3+4+5}{5} = 3, \bar{y} = \frac{27+23+20+17+13}{5} = 20$ 2 分

$\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2 = 10, \sum_{i=1}^5 (y_i - \bar{y})^2 = 116, \sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = -34$ 4 分

样本相关系数 $r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}} = \frac{-34}{\sqrt{10} \times \sqrt{116}} = \frac{-34}{\sqrt{1160}} \approx \frac{-34}{34.06} \approx -0.998$

又 $|r| \approx 0.998 > 0.75$

所以可以判断 y 与 x 具有较强的线性相关关系。 6 分

(2) 由题意知， X 的可能取值为 1, 2, 3. 7 分

因为 $P(X=1) = \frac{C_4^1 C_2^2}{C_6^3} = \frac{1}{5}$

$P(X=2) = \frac{C_4^2 C_2^1}{C_6^3} = \frac{3}{5}$

$P(X=3) = \frac{C_4^3 C_2^0}{C_6^3} = \frac{1}{5}$

所以 X 的分布列为：

X	1	2	3
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$

..... 10 分

所以 $E(X) = 1 \times \frac{1}{5} + 2 \times \frac{3}{5} + 3 \times \frac{1}{5} = 2$ 12 分

18. 解：(1) 连接 CH .

由 $MB = CD = 2, MD = BC = 2\sqrt{3}, \angle BMD = \angle BCD = 90^\circ$

得： $BD = 4, \angle MDB = \angle DBC = 30^\circ, MH = \sqrt{3}, BH = 1$ 1 分

在 $\triangle BCH$ 中，由余弦定理得： $CH = \sqrt{BH^2 + BC^2 - 2BH \cdot BC \cdot \cos 30^\circ} = \sqrt{7}$

$$\therefore MH^2 + CH^2 = MC^2$$

$\therefore MH \perp CH$ 3 分

$\therefore MH \perp BD$, 又 $CH, BD \subset$ 平面 $BCD, CH \cap BD = H$

$\therefore MH \perp$ 平面 BCD

又 $\therefore CD \subset$ 平面 BCD

$\therefore MH \perp CD$ 6 分

(2) 法一：定义法

过点 C 作 $CP \perp BD$ 于 P , 过点 P 作 $PQ \perp BM$ 于 Q , 连接 CQ .

$\therefore MH \perp$ 平面 BCD , 又 $CP \subset$ 平面 BCD

$\therefore MH \perp CP$

$\therefore CP \perp BD$, 又 $MH, BD \subset$ 平面 $MBD, MH \cap BD = H$

$\therefore CP \perp$ 平面 MBD , 又 $BM \subset$ 平面 MBD 8 分

$\therefore CP \perp BM$

$\therefore PQ \perp BM$, 又 $PQ, CP \subset$ 平面 $CPQ, PQ \cap CP = P$

$\therefore BM \perp$ 平面 CPQ , 又 $CQ \subset$ 平面 CPQ

$\therefore BM \perp CQ$

$\therefore \angle CQP$ 是二面角 $C-BM-D$ 的平面角.10 分

在 $\triangle BCP$ 中， $CP = BC \sin \angle CBP = \sqrt{3}, BP = BC \cos \angle CBP = 3$

$$\therefore PQ = BP \sin \angle QBP = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \tan \angle CQP = \frac{CP}{PQ} = \frac{2}{3}$$

$$\therefore \tan \angle CQP = \frac{3\sqrt{3}}{13}$$

$\therefore$ 二面角 $C-BM-D$ 的余弦值为 $\frac{3\sqrt{13}}{13}$12 分

法二：向量法

在平面 BCD 内过点 H 作 $HN \perp BD$ 于 N , 交 BC 于 N

如图以点 H 为坐标原点，分别以 HN 方向为 x 轴正向， HD 方向为 y 轴正向， HM 方向为 z 轴正向建立空间直角坐标系：

$$H(0,0,0), B(0,-1,0), D(0,3,0), C(\sqrt{3},2,0), M(0,0,\sqrt{3})$$

由题意得：平面 BMD 的法向量 $\vec{m}$ 为 x 轴方向，

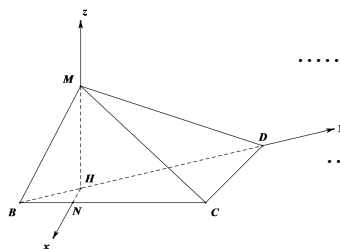
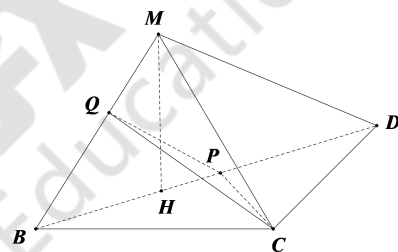
$$\text{设 } \vec{m} = (1,0,0)$$

设平面 CBM 的法向量为 $\vec{n}, \vec{n} = (u,v,w)$

$$\vec{BC} = (\sqrt{3},3,0), \vec{BM} = (0,1,\sqrt{3})$$

$$\text{则 } \begin{cases} \sqrt{3}u + 3v = 0 \\ v + \sqrt{3}w = 0 \end{cases}, \text{ 令 } v = \sqrt{3}, \text{ 则 } u = -3, w = -1 \quad \vec{n} = (-3, \sqrt{3}, -1) \quad \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\cos \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle = \frac{\vec{m} \cdot \vec{n}}{|\vec{m}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{-3}{1 \times \sqrt{13}} = -\frac{3\sqrt{13}}{13}$$



∵二面角 $C-BM-D$ 的平面角为锐角.

∴二面角 $C-BM-D$ 的余弦值为 $\frac{3\sqrt{13}}{13}$12 分

19. 解: (1) $f(x) = 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x\right)\sin x + 2\cos 2x - 1$,

$$= \sqrt{3}\sin 2x + 1 - \cos 2x + 2\cos 2x - 1$$

$$= 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) \quad \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

令 $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 2x + \frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, 则 $-\frac{\pi}{3} + k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ 5 分

∴ $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left[-\frac{\pi}{3} + k\pi, \frac{\pi}{6} + k\pi\right], k \in \mathbb{Z}$ 6 分

(2) 若选①②为条件, ③为结论.

证明: 由① $f(A) = 1$, 得 $2\sin\left(2A + \frac{\pi}{6}\right) = 1$, 即: $\sin\left(2A + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$

在 $\triangle ABC$ 中, ∵ $A \in (0, \pi)$

$$\therefore 2A + \frac{\pi}{6} \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}\right)$$

$$\therefore 2A + \frac{\pi}{6} = \frac{5}{6}\pi,$$

$$\therefore A = \frac{\pi}{3} \quad \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\therefore S = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}ab$$

$$\therefore \sin C = 1.$$

又 ∵ $0 < C < \pi$

$$\therefore C = \frac{\pi}{2}. \quad \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\therefore B = \frac{\pi}{6}, c = 2b, a = \sqrt{3}b.$$

$$\therefore a^2 = b^2 + bc \quad \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

若选①③为条件, ②为结论.

证明: 由① $f(A) = 1$, 得 $2\sin\left(2A + \frac{\pi}{6}\right) = 1$, 即: $\sin\left(2A + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$

在 $\triangle ABC$ 中, $A \in (0, \pi), 2A + \frac{\pi}{6} \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}\right)$

$$\therefore 2A + \frac{\pi}{6} = \frac{5}{6}\pi$$

$$\therefore A = \frac{\pi}{3} \quad \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

由 $a^2 = b^2 + bc$ 得 $a^2 + c^2 - b^2 = c^2 + bc$

$$\text{那么: } \cos B = \frac{c^2 + bc}{2ac} = \frac{c + b}{2a} = \frac{\sin C + \sin B}{2\sin A} \quad \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

去分母得: $2\sin A \cos B = \sin C + \sin B = \sin(A + B) + \sin B$,

故 $\sin(A - B) = \sin B \quad \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$

∵ $0 < A < \pi, 0 < B < \pi, \therefore -\pi < A - B < \pi, \sin(A - B) = \sin B > 0$,

∴ $A - B = B$ 或者 $(A - B) + B = \pi$ (不成立),

$$\therefore A = 2B = \frac{\pi}{3}, C = \frac{\pi}{2}.$$

$$\therefore S = \frac{1}{2}ab \quad \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

若选②③为条件,①为结论.

$$\text{证明: } \because S = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}ab$$

$$\therefore \sin C = 1$$

$$\text{又 } \because 0 < C < \pi$$

$$\therefore C = \frac{\pi}{2} \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\text{由 } a^2 = b^2 + bc \text{ 得 } a^2 + c^2 - b^2 = c^2 + bc$$

$$\text{那么: } \cos B = \frac{c^2 + bc}{2ac} = \frac{c + b}{2a} = \frac{\sin C + \sin B}{2\sin A} \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$\text{去分母得: } 2\sin A \cos B = \sin C + \sin B = \sin(A + B) + \sin B, \text{ 故 } \sin(A - B) = \sin B \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\because 0 < A < \pi, 0 < B < \pi, \therefore -\pi < A - B < \pi, \sin(A - B) = \sin B > 0$$

$$\therefore A - B = B \text{ 或者 } (A - B) + B = \pi (\text{不成立})$$

$$\therefore A = 2B = \frac{\pi}{3}$$

$$\therefore f(A) = f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1 \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

20. 解: (1) 设圆 M 的半径为 r , 圆 M 与圆 P 内切于点 Q .

$\because$ 点 N 在圆 M 内部 $\therefore$ 点 P 在圆 M 内部.

$$\therefore PM + PN = PM + PQ = r = 4 > MN = 2\sqrt{3} \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

那么点 P 的轨迹为焦点在 x 轴的椭圆, 设曲线 $\Gamma: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$

$$\because PM + PN = 4 \text{ 可得: } 2a = 4, \therefore a = 2. \quad 2c = MN = 2\sqrt{3}, \therefore c = \sqrt{3}$$

$$\therefore b^2 = a^2 - c^2 = 1$$

$$\therefore \text{曲线 } \Gamma: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

(2) 法一: 联立韦达定理

显然直线 l 的斜率 k 存在, 设 $l: y - 1 = k(x - 2)$, 即: $y = kx - 2k + 1, M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$.

$$\text{联立 } l \text{ 与 } \Gamma: \begin{cases} \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \\ y = kx - 2k + 1 \end{cases} \text{ 得: } (4k^2 + 1)x^2 - (16k^2 - 8k)x + 16k^2 - 16k = 0$$

$$\therefore \Delta = (16k^2 - 8k)^2 - 4(4k^2 + 1)(16k^2 - 16k) = 64k[(4k^3 - 4k^2 + k) - (4k^3 - 4k^2 + k - 1)] = 64k$$

$$\text{由 } \Delta > 0 \text{ 得: } 64k > 0$$

$$\therefore k > 0$$

$$\therefore x_1 + x_2 = \frac{16k^2 - 8k}{4k^2 + 1} \quad x_1 x_2 = \frac{16k^2 - 16k}{4k^2 + 1} \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

显然直线 AM 的斜率 k_{AM} 存在且 $k_{AM} = \frac{y_1}{x_1 - 2}$, 那么: $l_{AM}: y = \frac{y_1}{x_1 - 2}(x - 2)$.

$$\text{令 } x = 0 \text{ 得到点 } P \text{ 的纵坐标 } y_P = \frac{-2y_1}{x_1 - 2}. \quad \text{同理: } Q \text{ 点的纵坐标 } y_Q = \frac{-2y_2}{x_2 - 2}. \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\text{那么: } y_P + y_Q = \frac{-2y_1}{x_1 - 2} + \frac{-2y_2}{x_2 - 2} = \frac{-2y_1(x_2 - 2) - 2y_2(x_1 - 2)}{(x_1 - 2)(x_2 - 2)}$$

$$= \frac{-2(kx_1 - 2k + 1)(x_2 - 2) - 2(kx_2 - 2k + 1)(x_1 - 2)}{x_1 x_2 - 2(x_1 + x_2) + 4}$$

$$= \frac{-4kx_1 x_2 + (8k - 2)(x_1 + x_2) - 16k + 8}{x_1 x_2 - 2(x_1 + x_2) + 4}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{-4k \frac{16k^2-16k}{4k^2+1} + (8k-2) \frac{16k^2-8k}{4k^2+1} - \frac{64k^3+16k}{4k^2+1} + \frac{32k^2+8}{4k^2+1}}{\frac{16k^2-16k}{4k^2+1} - 2 \frac{16k^2-8k}{4k^2+1} + 4} \\
&= \frac{-64k^3+64k^2+128k^3-64k^2-32k^2+16k-64k^3-16k+32k^2+8}{4k^2+1} \\
&= \frac{4}{4k^2+1} \\
&= \frac{8}{4k^2+1} = 2. \dots\dots\dots 10 \text{ 分}
\end{aligned}$$

$$\therefore \frac{y_P + y_Q}{2} = 1 \quad \text{即：} PQ \text{ 的中点为 } B(0,1). \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$

$$\text{那么：} \frac{|PB|}{|BQ|} = 1 \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

法二：齐次化

设 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$.

显然直线 AM 的斜率 k_{AM} 存在且 $k_{AM} = \frac{y_1}{x_1-2}$, 那么: $l_{AM}: y = \frac{y_1}{x_1-2}(x-2)$.

$$\text{令 } x=0 \text{ 得到 } y_P = \frac{-2y_1}{x_1-2}. \quad \text{同理: } y_Q = \frac{-2y_2}{x_2-2}. \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

由题意知: 直线 MN 不过 $(2,0)$. 显然直线 MN 的斜率 k 存在, 可设直线 $MN: y-1=k(x-2)$

$$\text{即: } y-k(x-2)=1 \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$\text{又椭圆方程: } \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$$

$$\text{即: } [(x-2)+2]^2 + 4y^2 - 4 = 0$$

$$\text{即: } (x-2)^2 + 4(x-2) + 4y^2 = 0 \dots\dots\dots ②$$

$$\text{由①②得: } (x-2)^2 + 4(x-2)[y-k(x-2)] + 4y^2 = 0$$

$$\text{即: } 4\left(\frac{y}{x-2}\right)^2 + 4\frac{y}{x-2} - 4k + 1 = 0 \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

$\therefore M、N$ 是直线 MN 与椭圆 Γ 的交点.

$$\therefore \frac{y_1}{x_1-2}, \frac{y_2}{x_2-2} \text{ 是一元二次方程 } 4x^2 + 4x + 4m + 1 = 0 \text{ 的两根.}$$

$$\text{由 } \Delta = 16 - 16(-4k+1) > 0 \text{ 得: } k > 0$$

$$\text{由韦达定理得: } \frac{y_1}{x_1-2} + \frac{y_2}{x_2-2} = -1 \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\therefore \frac{y_P + y_Q}{2} = -\left(\frac{y_1}{x_1-2} + \frac{y_2}{x_2-2}\right) = 1 \quad \text{即: } PQ \text{ 的中点为 } B(0,1) \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$

$$\text{那么: } \frac{|PB|}{|BQ|} = 1 \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

【说明: 若未写 $\Delta > 0$ 扣 1 分】

$$21. \text{ 解: (1) 由 } f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \sin x + ax \text{ 得: } f'(x) = x - \cos x + a \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$$

$$\text{令 } f'(x) = h(x)$$

$$\text{当 } a=1 \text{ 时, } f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \sin x + x \quad h(x) = x - \cos x + 1$$

$$\therefore h'(x) = 1 + \sin x \geq 0 \quad \text{故 } h(x) \text{ 在 } R \text{ 上单调递增, 又 } h(0) = 0 \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$\therefore x \in (-\infty, 0), f'(x) = h(x) < 0, f(x) \text{ 单调递减;}$$

$x \in (0, +\infty), f'(x) = h(x) > 0, f(x)$ 单调递增.4 分

$\therefore f(x)$ 的最小值为 $f(0) = 0$5 分

(2) 证明: ①由 (1) 知: $h(x) = f'(x) = x - \cos x + a$

$\therefore h'(x) = 1 + \sin x \geq 0 \quad \therefore h(x)$ 在 R 上单调递增. 即: $f'(x)$ 在 R 上单调递增.

又 $f'(-2-a) = -2 - \cos(2+a) < 0 \quad f'(2-a) = 2 - \cos(2-a) > 0$

$\therefore f'(-2-a) \cdot f'(2-a) < 0$ 6 分

$\therefore$ 存在唯一 $x_0 \in (-2-a, 2-a)$, 使得 $f'(x_0) = 0$ 且 $f(x)$ 在 $(-\infty, x_0)$ 单调递减, 在 $(x_0, +\infty)$ 单调递增.

$\therefore f(x)$ 有且仅有一个极小值点 x_07 分

②由①知: $f(x)$ 有且仅有一个极值点 x_0 且 $f'(x_0) = x_0 - \cos x_0 + a = 0$

当 $a \in (-\infty, 1]$ 时, $f'(0) = a - 1 \leq 0 \quad f'(2-a) = 2 - \cos(2-a) > 0$

由①知: $x_0 \geq 0$ 9 分

要证: $f(x_0) \geq g(x_0)$

只需证: $F(x_0) = f(x_0) - g(x_0) = \frac{1}{2}x_0^2 - \sin x_0 + ax_0 - (-\frac{1}{2}x_0^2 + 2\sin x_0 - 2x_0) \geq 0$

而 $a = \cos x_0 - x_0$ 那么: $F(x_0) = 2x_0 - 3\sin x_0 + x_0 \cos x_0 \quad (x_0 \geq 0)$.

$\therefore F'(x_0) = 2 - 2\cos x_0 - x_0 \sin x_0$

令: $P(x_0) = F'(x_0)$ 则 $P'(x_0) = \sin x_0 - x_0 \cos x_0$

令: $S(x_0) = P'(x_0)$ 则 $S'(x_0) = x_0 \sin x_0$

1° 当 $x_0 \in [0, \pi]$ 时:

$\therefore S'(x_0) \geq 0$

$\therefore S(x_0)$ 在 $[0, \pi]$ 上单调递增. 即: $P'(x_0)$ 在 $[0, \pi]$ 上单调递增. 又 $P'(0) = 0$

$\therefore P'(x_0) \geq 0$

$\therefore P(x_0)$ 在 $[0, \pi]$ 上单调递增. 即: $F'(x_0)$ 在 $[0, \pi]$ 上单调递增. 又 $F'(0) = 0$

$\therefore F'(x_0) \geq 0$

$\therefore F(x_0)$ 在 $[0, \pi]$ 上单调递增.

$\therefore F(x_0) \geq F(0) = 0$ 11 分

2° 当 $x_0 > \pi$ 时, $\varphi(x_0) = 2x_0 - 3\sin x_0 + x_0 \cos x_0$
 $= (2 + \cos x_0)x_0 - 3\sin x_0 > x_0 - 3 > \pi - 3 > 0$

综上所述: 当 $a \in (-\infty, 1]$ 时, $f(x_0) \geq g(x_0)$12 分

22. 解: (1) 因为 $(e^t + \frac{1}{e^t})^2 - (e^t - \frac{1}{e^t})^2 = 4$, 所以 $y^2 - x^2 = 4$ 2 分

又 $\therefore y = e^t + \frac{1}{e^t} \geq 2\sqrt{e^t \cdot \frac{1}{e^t}} = 2$ 3 分

曲线 C_1 的普通方程为 $y^2 - x^2 = 4 (y \geq 2)$4 分

【说明: 若未给出范围 $y \geq 2$, 扣 1 分】

(2) $\therefore x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta$,

$\therefore$ 曲线 C_1 的极坐标方程为 $\rho^2(\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) = 4 (\rho \sin \theta \geq 2)$ 5 分

设点 $A(\rho_1, \alpha)$, 则 $|OA| = |\rho_1| = \sqrt{\frac{4}{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}}$ 6 分

设点 $B(\rho_2, \alpha)$, 则 $|OB| = |\rho_2| = |4 \cos \alpha|$7 分

$\therefore \frac{|OA|}{|OB|} = \sqrt{2}$, 化简为 $16 \cos^4 \alpha - 8 \cos^2 \alpha + 1 = 0$, 即为 $(4 \cos^2 \alpha - 1)^2 = 0$

得 $\cos^2 \alpha = \frac{1}{4}$, $\cos \alpha = \pm \frac{1}{2}$, 又因为 $\overrightarrow{OA} = \sqrt{2} \cdot \overrightarrow{OB}$ 且 $\alpha \in [0, \pi)$9 分

$\therefore \alpha = \frac{\pi}{3}$10 分

【说明：若多求出一个 $\alpha = \frac{2\pi}{3}$, 扣 1 分】

23. 法一：

解：由 $a > 0, b > 0$ 且 $a^2 + b^2 = 2$, 可设 $a = \sqrt{2} \cos \theta, b = \sqrt{2} \sin \theta$ ($\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$).2 分

$$\text{则 } ab = \sqrt{2} \cos \theta \cdot \sqrt{2} \sin \theta = \sin 2\theta$$

$$\because \theta \in (0, \frac{\pi}{2})$$

$$\therefore 2\theta \in (0, \pi)$$

$$\therefore ab \in (0, 1] \quad \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$(1) \because 2a + 3b = 2\sqrt{2} \cos \theta + 3\sqrt{2} \sin \theta = \sqrt{26} \sin(\theta + \varphi) \quad \text{其中 } \tan \varphi = \frac{2}{3} \text{ 且 } \varphi \in (0, \frac{\pi}{2})$$

$\therefore$ 当 $\theta + \varphi = \frac{\pi}{2}$ 时, $2a + 3b$ 取得最大值 $\sqrt{26}$5 分

$$(2) (a^3 + b^3)(a + b) = (a + b)^2(a^2 + b^2 - ab) = (a^2 + b^2 + 2ab)(a^2 + b^2 - ab) \\ = (2 + 2\sin 2\theta)(2 - \sin 2\theta) \quad \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$\text{令 } \sin 2\theta = t, \text{ 则 } (a^3 + b^3)(a + b) = (2 + 2t)(2 - t) = -2t^2 + 2t + 4 \quad (t \in (0, 1])$$

令 $f(t) = -2t^2 + 2t + 4$, 则 $f(t)$ 在 $(0, \frac{1}{2})$ 上单调递增, 在 $(\frac{1}{2}, 1]$ 上单调递减.

$$\therefore f(1) \leq f(t) \leq f(\frac{1}{2}) \quad \text{即: } 4 \leq f(t) \leq \frac{9}{2} \quad \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$\therefore 4 \leq (a + b)(a^3 + b^3) \leq \frac{9}{2}. \quad \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

法二：

解：(1) 由柯西不等式得： $(a^2 + b^2)(2^2 + 3^2) \geq (2a + 3b)^2$ 2 分

$$\text{即: } (2a + 3b)^2 \leq 26$$

$$\text{故: } 2a + 3b \leq \sqrt{26} \quad \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

当且仅当 $\begin{cases} 3a = 2b \\ a^2 + b^2 = 2 \end{cases}$, 即 $\begin{cases} a = \frac{2\sqrt{26}}{13} \\ b = \frac{3\sqrt{26}}{13} \end{cases}$, 时取得等号, $\therefore 2a + 3b$ 的最大值为 $\sqrt{26}$4 分

$$(2) \text{ 证明: 要证 } 4 \leq (a^3 + b^3)(a + b) \leq \frac{9}{2}$$

$$\text{只需证: } 4 \leq a^4 + b^4 + ab(a^2 + b^2) \leq \frac{9}{2}$$

$$\text{只需证: } 4 \leq (a^2 + b^2)^2 + ab(a^2 + b^2) - 2a^2b^2 \leq \frac{9}{2}$$

$$\text{只需证: } 4 \leq 4 + 2ab - 2a^2b^2 \leq \frac{9}{2} \quad \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$\because$ 正实数 a, b 满足 $a^2 + b^2 = 2$, 所以 $2 = a^2 + b^2 \geq 2ab$, 当且仅当 $a = b$ 时等号成立

$$\therefore 0 < ab \leq 1 \quad \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

设 $ab = t \in (0, 1]$, $f(t) = -2t^2 + 2t + 4, t \in (0, 1]$

$\because f(t)$ 在 $(0, \frac{1}{2})$ 上单调递增; 在 $(\frac{1}{2}, 1)$ 上单调递减. 又 $f(0) = f(1) = 4, f(\frac{1}{2}) = \frac{9}{4}$

$$\therefore 4 \leq f(t) \leq \frac{9}{2}, \text{ 即: } 4 \leq (a + b)(a^3 + b^3) \leq \frac{9}{2}. \quad \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$