

遂宁市高中 2024 届三诊考试

数学（理科）试题

本试卷分第 I 卷（选择题）和第 II 卷（非选择题）两部分。总分 150 分。考试时间 120 分钟。

第 I 卷（选择题，满分 60 分）

注意事项：

1. 答题前，考生务必将自己的姓名、班级、考号用 0.5 毫米的黑色墨水签字笔填写在答题卡上。并检查条形码粘贴是否正确。
2. 选择题使用 2B 铅笔填涂在答题卡对应题目标号的位置上，非选择题用 0.5 毫米黑色墨水签字笔书写在答题卡对应框内，超出答题区域书写的答案无效；在草稿纸、试题卷上答题无效。
3. 考试结束后，将答题卡收回。

一、选择题（本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

1. 已知集合 $A = \left\{ x \mid x^2 - \frac{1}{9} \leq 0 \right\}$, $B = \left\{ x \mid \frac{1}{\sqrt{x}} \geq 1 \right\}$, 则 $A \cap B =$
A. $\left[0, \frac{1}{3} \right]$ B. $\left(0, \frac{1}{3} \right]$ C. $(0, 1]$ D. $[0, 1]$
2. 已知复数 $z = 2 + i$, 则 $\frac{i^{2025}}{\bar{z}} =$
A. $\frac{1}{5} - \frac{2i}{5}$ B. $-\frac{1}{5} - \frac{2i}{5}$ C. $\frac{1}{5} + \frac{2i}{5}$ D. $-\frac{1}{5} + \frac{2i}{5}$
3. 下列函数中，既是周期函数又是偶函数的是
A. $y = \tan x$ B. $y = |\tan x|$
C. $y = \sin|x|$ D. $y = \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right)$
4. 设双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{9} = 1$ ($a > 0$) 的渐近线方程为 $x \pm 2y = 0$, 则实数 a 的值为
A. 6 B. 4 C. 3 D. 2

5. 某公司研发新产品投入 x (单位：百万) 与该产品的收益 y (单位：百万) 的 5 组统计数据如下表所示：由表中数据求得投入金额 x 与收益 y 满足回归方程 $\hat{y} = \hat{b}x + 2.6$ ，则下列结论不正确的是

x	5	6	8	9	12
y	16	20	25	28	36

- A. x 与 y 有正相关关系
B. 回归直线经过点 $(8, 25)$
C. $\hat{b} = 2.4$
D. $x = 9$ 时，残差为 0.2
6. 设 m, n 是两条不同的直线， α, β 是两个不同的平面，下列命题中正确的是
- A. 若 $m \perp \alpha, m \parallel n, n \perp \beta$ ，则 $\alpha \perp \beta$
B. 若 $\alpha \parallel \beta, m \subset \alpha, m \parallel n$ ，则 $n \parallel \beta$
C. 若 m, n 为异面直线， $m \parallel \alpha, n \parallel \beta, m \subset \beta, n \subset \alpha$ ，则 $\alpha \parallel \beta$
D. 若 $m \perp n, \alpha \parallel \beta$ ，则 m 与 α 所成的角和 n 与 β 所成的角互余
7. 已知函数 $y = f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的奇函数，对任意实数 x 都有 $f(2-x) = f(x)$ 。当 $x \in [1, 2]$ 时， $f(x) = 1 - \log_2 x$ 。则 $f(19)$ 的值为
- A. 0 B. 1 C. $1 - \log_2 21$ D. -1
8. 已知函数 $f(x) = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ ，把 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度得到函数 $g(x)$ 的图象，则
- A. $g(x)$ 是偶函数
B. $g(x)$ 的图象关于直线 $x = -\frac{\pi}{4}$ 对称
C. $g(x)$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递增
D. 不等式 $g(x) \leq 0$ 的解集为 $\left[k\pi + \frac{\pi}{2}, k\pi + \pi\right], k \in \mathbb{Z}$

9. 若 $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x + 1$ 是区间 $(m-1, m+5)$ 上的单调函数, 则实数 m 的取值范围是
- A. $m \leq -6$ 或 $m \geq 3$ B. $m \geq 3$ C. $m \leq -6$ D. $-6 \leq m \leq 3$
10. 在 $\triangle ABC$ 中, a, b, c 分别是角 A, B, C 的对边, 若 $a^2 + b^2 = 2026c^2$, 则 $\frac{2\tan A \tan B}{\tan C (\tan A + \tan B)}$ 的值为
- A. 2023 B. 2024 C. 2025 D. 2026
11. 已知正四面体 $ABCD$ 的棱长为 4, 动点 P 满足 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$, 且 $\overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PC} = 0$, 则点 P 的轨迹长为
- A. $\frac{\pi}{2}$ B. π C. 2π D. $2\sqrt{3}\pi$
12. 过抛物线 $C_1: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点 F 作直线 l , 与 C_1 交于 A, B 两点 (点 A 在 x 轴上方), 与 y 轴正半轴交于点 D , A 为 DF 中点, 且 $|BD| = 6$, 又点 $C(1, 0)$, 曲线 C_2 上任意一点 P 满足 $|\overrightarrow{PC}| = 1$, 过定点 C 的直线 m 与抛物线 C_1 和曲线 C_2 的四个交点从上到下依次为 G, M, N, H , 则 $|GN| + 4|HM|$ 的最小值为
- A. 8 B. 12 C. 13 D. 14

第 II 卷 (非选择题, 满分 90 分)

注意事项:

1. 请用蓝黑钢笔或圆珠笔在第 II 卷答题卡上作答, 不能答在此试卷上。
2. 试卷中横线及框内注有“▲”的地方, 请在第 II 卷答题卡上作答。

二、填空题 (本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 满分 20 分.)

13. 已知平面向量 $\vec{a} = (2, x-1)$, $\vec{b} = (3, 2-x)$, 若向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 共线, 则 $x = \underline{\hspace{1cm} \blacktriangle \hspace{1cm}}$

14. 已知实数 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x-y \leq 1 \\ x \geq 2y \\ x+y \leq 1 \end{cases}$, 则 $z = 3x + 2y$ 的最大值为 $\underline{\hspace{1cm} \blacktriangle \hspace{1cm}}$

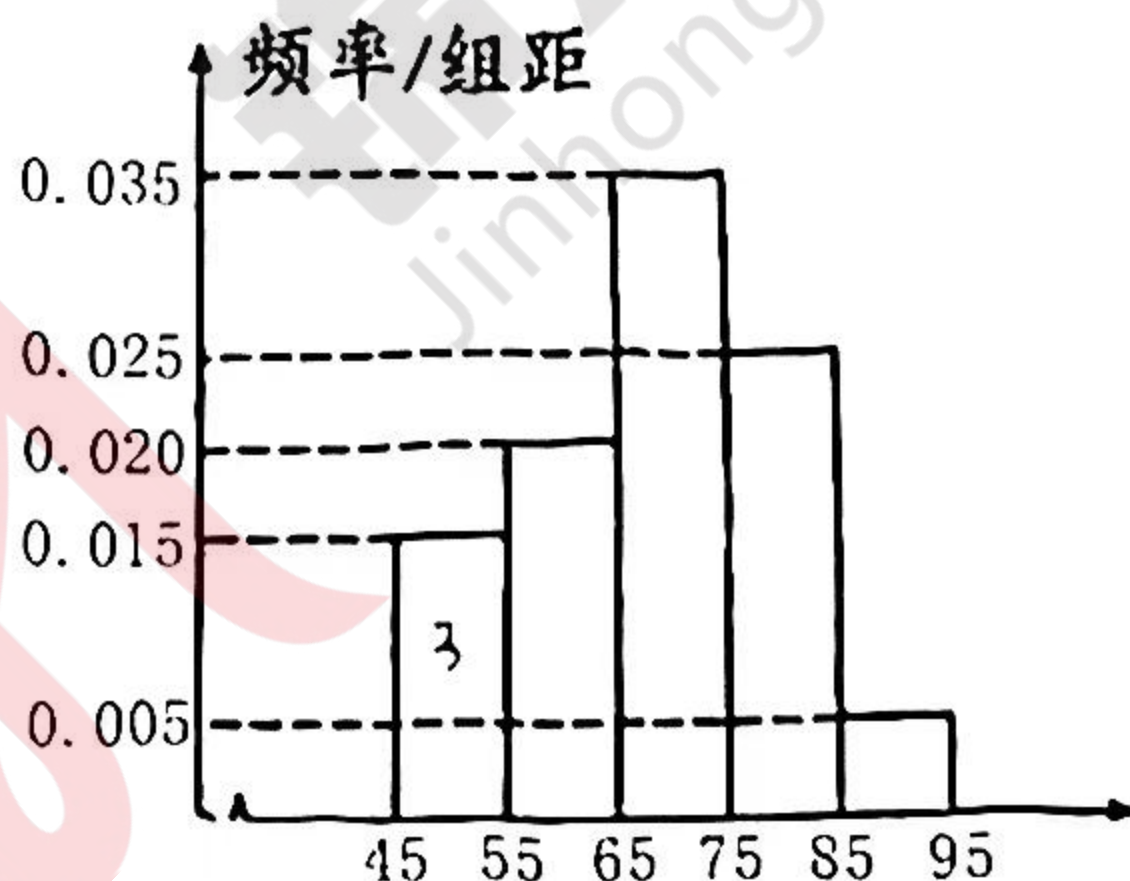
15. 已知圆 $x^2 + y^2 = 4$ 上一点 $A(\frac{6}{5}, \frac{8}{5})$, 现将点 A 绕圆心顺时针旋转 $\frac{\pi}{6}$ 到点 B , 则点 B 的横坐标为 ▲

16. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} a^2x - a(x^2 + 1), & x \leq a \\ \frac{e^x}{a-x}, & x > a \end{cases}$, 若 $f(x)$ 的最大值为 $-\frac{3}{4}$, 则实数 a 的取值构成的集合为 ▲

三、解答题: 共 70 分, 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17—21 题为必考题, 每个试题考生都必须作答. 第 22、23 题为选考题, 考试根据要求作答.

17. (12 分)

某工厂为了检查一条流水线产品的某项指标值 K , 随机抽取流水线上的 20 件产品作为样本测出该项指标值 K , 指标值 K 的分组区间为 $(45, 55]$, $(55, 65]$, $\dots$, $(85, 95]$. 由此得到样本的频率分布直方图 (如下图).

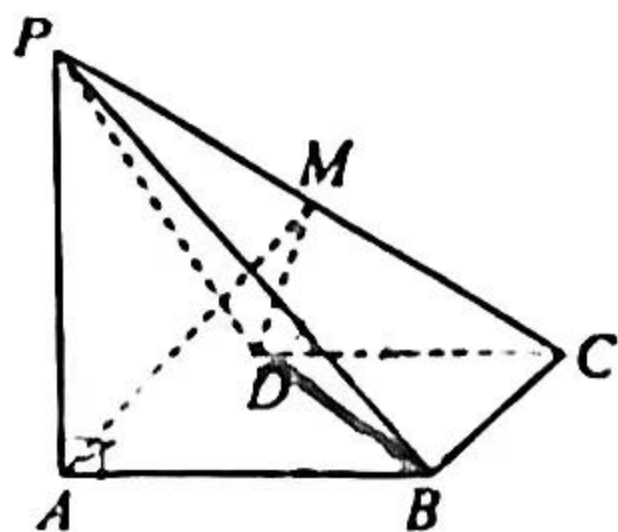


(1) 估计该产品指标值 K 的平均值 (同一组数据用该组区间的中点值作代表);

(2) 在上述抽取的 20 件产品中任取 2 件, 设 X 为指标值超过 65 的产品数量, 求 X 的分布列与数学期望.

18. (12分)

如图,在四棱锥 $P-ABCD$ 中,面 $PAD \perp$ 面 $ABCD$, $AB \parallel CD$, $AB \perp BC$, $AB = PA = 2$, $BC = CD = 1$, $AD = \sqrt{2}$, $PB = 2\sqrt{2}$, M 为 PC 的中点.

(1) 求证: $BD \perp PD$;(2) 求二面角 $M-AD-B$ 的余弦值.

19. (12分)

已知点集 $L = \{(x, y) | y = \vec{m} \cdot \vec{n}\}$, 其中 $\vec{m} = (2x-1, 1)$, $\vec{n} = (1, 2)$, 点

$P_n(a_n, b_n) \in L$, P_1 为 L 与 y 轴的公共点, 等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为1.

(1) 求数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 令数列 $d_n = \frac{b_n}{2^{a_n+1}}$, 记数列 $\{d_n\}$ 的前 n 项和为 C_n , 是否存在整数 k , 使 $C_n < k$ 对任意正整数 n 都成立? 若存在, 求 k 的最小值; 若不存在, 请说明理由.

20. (12分)

已知函数 $f(x) = (x^2 - 2ax) \ln x$, $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2ax$, $a > \frac{1}{2}$

(1) 当 $a=1$ 时, 求函数 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处的切线方程;

(2) 若方程 $f(x) = g(x)$ 在 $x \in \left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$ 上有两个不等实数根,

求实数 a 的取值范围.

21. (12分)

已知椭圆具有如下光学性质: 从椭圆的一个焦点发出的光线射向椭圆上任一点, 经椭圆反射后必经过另一个焦点. 若从椭圆

$C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左焦点 F_1 发出的光线, 经过两次反射之后

回到点 F_1 , 光线经过的路程为 8, 且椭圆上的点到焦点的最远距离是 $2 + \sqrt{3}$.

(1) 求椭圆 C 的标准方程;

(2) 直线 m 交椭圆 C 于 G, H 两点, 若 GH 中点坐标为 $(-1, \frac{1}{2})$,

求直线 m 的方程;

(3) 设直线 l 不过坐标原点且不垂直于坐标轴, 直线 l 与 C 交于 A, B 两点, 点 $M(x_0, y_0) (x_0, y_0 \neq 0)$ 为弦 AB 的中点. 过点 M 作直线 l 的垂线交椭圆 C 于 D, E 两点, N 为弦 DE 的中点. 直线 l 与直线 ON 交于 T , 若 $\overrightarrow{ON} = \lambda \overrightarrow{NT} (\lambda > 0)$, 求 λ 的最大值.



选考题: 共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答, 如果多做, 则按所做第一题计分.

22. (10 分)

在平面直角坐标系中, 曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = 1 + 3\cos\alpha \\ y = 3\sin\alpha \end{cases}$ (α 为

参数). 以坐标原点 O 为极点, x 轴非负半轴为极轴建立极坐标系,

直线 l 的极坐标方程为 $\sqrt{2}\rho\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = 2$.

(1) 求曲线 C 的极坐标方程以及直线 l 的直角坐标方程;

(2) 直线 l 与曲线 C 交于 M, N 两点, 且 $A(2, 0)$, 求 $\frac{1}{|AM|} + \frac{1}{|AN|}$ 的值



23. (10 分)

已知关于 x 的不等式 $|x + 2| - |2x - 2| \geq m$ 有解.

(1) 求实数 m 的取值范围;

(2) 若 a, b, c 均为正数, n 为 m 的最大值, 且 $a + 3b + 4c = n$.

求证: $a^2 + 2ab + 5b^2 + c^2 \geq \frac{1}{2}$.

