

## 南充市高 2024 届高三适应性考试(二诊)

## 文科数学参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求。

| 题号 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|----|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|
| 选项 | A | B | D | C | C | A | D | C | B | A  | B  | B  |

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。把答案填在答题卡上。

13. 3      14. 1      15.  $\frac{1}{9}$       16. ①③

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17—21 题必考题，每个试题考生必须作答。第 22、23 题为选考题，考试根据要求作答。

## (一) 必考题

17. 证明 (1). 取  $BD$  中点  $F$ , 连接  $NF, MF$ . ..... 1 分

$\because N$  分别为  $AD$  的中点

$\therefore NF \parallel \frac{1}{2}AB$  ..... 2 分

又  $\because$  四棱柱  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  为直四棱柱, 且  $M$  为  $A_1B_1$  的中点

$\therefore A_1M \parallel \frac{1}{2}AB$

$\therefore NF \parallel A_1M$  ..... 3 分

$\therefore$  四边形  $A_1NFM$  为平行四边形

$\therefore A_1N \parallel MF$  ..... 4 分

又  $\because MF \subset$  平面  $BDM, A_1N \not\subset$  平面  $BDM$

$\therefore A_1N \parallel$  平面  $BDM$  ..... 6 分

注: 若取  $AB$  的中点  $H$ , 再证明平面  $A_1NH \parallel$  平面  $BDM$  也可, 酌情给分。

(2). 连接  $B_1D_1$

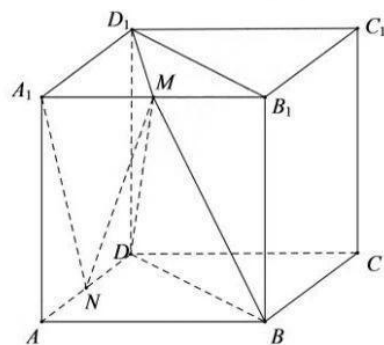
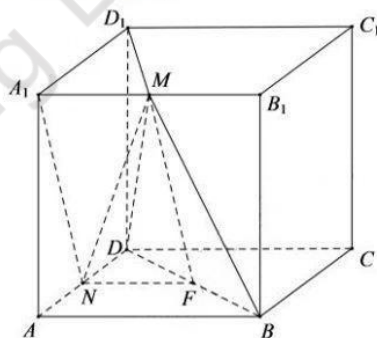
$\because$  底面  $ABCD$  是菱形,  $\angle BAD = 60^\circ$

$\therefore \triangle A_1B_1D_1$  为等边三角形

$\because M$  为  $A_1B_1$  的中点

$\therefore D_1M \perp A_1M$  ..... 8 分

又  $\because$  四棱柱  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  为直四棱柱



$\therefore DD_1 \perp$  底面  $A_1B_1C_1D_1$

$\therefore DD_1 \perp A_1M$  ..... 9 分

又  $\because D_1M \cap DD_1 = D_1$

$\therefore A_1M \perp$  平面  $DD_1M$  ..... 11 分

又  $A_1M \subset$  平面  $A_1MN$

$\therefore$  平面  $A_1MN \perp$  平面  $DD_1M$  ..... 12 分

18. 解 (1): 当  $n=1$  时,  $3S_1 - a_1 = 64$ , 得  $a_1 = 32$ . ..... 1 分

$$\therefore 3S_n - a_n = 64$$

$\therefore$  当  $n \geq 2$  时,  $3S_{n-1} - a_{n-1} = 64$  ..... 2 分

$$\therefore 2a_n + a_{n-1} = 0, \frac{a_n}{a_{n-1}} = -\frac{1}{2}.$$

所以数列  $\{a_n\}$  以 32 为首项,  $-\frac{1}{2}$  为公比的等比数列. .... 4 分

$$a_n = 32 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}. \quad \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$(2): S_n = \frac{32[1 - (-\frac{1}{2})^n]}{1 - (-\frac{1}{2})} = \frac{64}{3}[1 - (-\frac{1}{2})^n] \quad \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$= \begin{cases} \frac{64}{3}[1 + (\frac{1}{2})^n], & n \text{ 为奇数} \\ \frac{64}{3}[1 - (\frac{1}{2})^n], & n \text{ 为偶数} \end{cases} \quad \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

又  $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$  是  $R$  上的减函数

所以当  $n=1$  时,  $S_n$  取得最大值为 32,

当  $n=2$  时,  $T_n$  取得最小值为 16. .... 10 分

$\because \forall n \in N_+, \lambda - 1 < S_n \leq 4\lambda + 4$  恒成立

$$\therefore \begin{cases} \lambda - 1 < 16 \\ 32 \leq 4\lambda + 4 \end{cases} \quad \text{解得: } 7 \leq \lambda < 17.$$

故  $\lambda$  取值范围为  $[7, 17)$  ..... 12 分

19. 解: (1). 临界值  $K=60$  时, I 级品中该指标大于 60 的频率为 0.93,

II 级品中该指标大于 60 的频率为 0.1 ..... 3 分

故该公司生产的 1000 个该型号芯片 I 级品和 1000 个 II 级品中应用于 A 型手机的芯片个数估计为:

$$1000 \times 0.93 + 1000 \times 0.1 = 1030 \quad \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

注: 结论中没有“估计、约”等体现统计思想的词汇, 扣 1 分.

(2). 当临界值  $K=x$  时, 若采用方案一:

$$\text{I 级品中该指标小于或等于临界值 } K \text{ 的概率为 } 0.002 \times 10 + 0.005 \times (x - 50) = 0.005x - 0.23,$$

可以估计 10000 部 A 型手机中有  $10000(0.005x - 0.23) = 50x - 2300$  部手机芯片应用错误;

..... 7 分

II级品中该指标大于临界值  $K$  的概率为  $0.01 \times 10 + 0.03 \times (60 - x) = -0.03x + 1.9$ ,

可以估计 10000 部 B 型手机中有  $10000(-0.03x + 1.9) = 19000 - 300x$  部手机芯片应用错误;

..... 8 分

故可以估计芯片生产商的损失费用  $f(x) = 0.08 \times (50x - 2300) + 0.04 \times (19000 - 300x)$

$$= 576 - 8x \quad \text{..... 10 分}$$

$$\because x \in [50, 55]$$

$$\therefore f(x) \in [136, 176]$$

又采用方案二需要检测费用共 130 万元

故从芯片生产商的成本考虑,应选择方案二 ..... 12 分

注:上面横线处若均无体现统计思想的词汇“估计、约”等,扣 1 分

20. 解 (1): 设点  $A, B, D$  的坐标分别为  $(x_0, \frac{x_0^2}{4}), (x_1, \frac{x_1^2}{4}), (x_2, \frac{x_2^2}{4})$ .

由  $AC \parallel x$  轴得: 点  $C$  的坐标为  $(-x_0, \frac{x_0^2}{4})$ . ..... 1 分

由  $x^2 = 4y$  得,  $y = \frac{1}{4}x^2$ ,  $y' = \frac{x}{2}$ .

所以抛物线在点  $A$  处的切线斜率为  $k_t = \frac{x_0}{2}$ .

$$\text{又 } k_{BD} = \frac{\frac{x_2^2}{4} - \frac{x_1^2}{4}}{x_2 - x_1} = \frac{x_2 + x_1}{4}$$

$$\text{由 } BD \parallel l \text{ 得: } \frac{x_2 + x_1}{4} = \frac{x_0}{2},$$

$$\therefore x_2 + x_1 = 2x_0. \quad \text{..... 3 分}$$

$$\therefore k' = \frac{\frac{x_2^2}{4} - \frac{x_0^2}{4}}{x_2 + x_0} = \frac{x_2 - x_0}{4}, k = \frac{\frac{x_1^2}{4} - \frac{x_0^2}{4}}{x_1 + x_0} = \frac{x_1 - x_0}{4}$$

$$\therefore k' + k = \frac{x_2 - x_0}{4} + \frac{x_1 - x_0}{4} = \frac{x_2 + x_1 - 2x_0}{4} = 0 \quad \text{..... 5 分}$$

(2) 根据题意:  $k = 2$   $k' = -2$

$\therefore$  直线  $CB$  的方程为  $y - \frac{x_0^2}{4} = 2(x + x_0)$ , 即  $y = 2x + 2x_0 + \frac{x_0^2}{4}$

$$\text{由 } \begin{cases} x^2 = 4y \\ y = 2x + 2x_0 + \frac{x_0^2}{4} \end{cases}, \text{得: } x^2 - 8x - 8x_0 - x_0^2 = 0$$

$$\therefore x_1(-x_0) = -8x_0 - x_0^2 \quad \text{得 } x_1 = x_0 + 8 \quad \text{..... 7 分}$$

又直线  $CD$  得方程为  $y - \frac{x_0^2}{4} = -2(x + x_0)$ , 即  $y = -2x - 2x_0 + \frac{x_0^2}{4}$

$$\text{由} \begin{cases} x^2 = 4y \\ y = -2x - 2x_0 + \frac{x_0^2}{4} \end{cases}, \text{得: } x^2 + 8x + 8x_0 - x_0^2 = 0$$

$$\therefore x_2 \cdot (-x_0) = 8x_0 - x_0^2, \text{得 } x_2 = x_0 - 8 \quad \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\therefore \text{直线 } BD \text{ 的方程为 } y - \frac{(x_0+8)^2}{4} = \frac{x_0}{2} \cdot (x - x_0 - 8)$$

$$\text{即 } 2xx_0 - 4y + 64 - x_0^2 = 0 \quad \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$\text{方法 1: } \therefore \text{点 } A \text{ 到直线 } BD \text{ 的距离为 } \frac{|2x_0^2 - x_0^2 + 64 - x_0^2|}{\sqrt{4x_0^2 + 16}} = \frac{32}{\sqrt{x_0^2 + 4}} \quad \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\text{又 } |BD| = \sqrt{1 + \left(\frac{x_0}{2}\right)^2} \cdot |x_1 - x_2| = 8\sqrt{x_0^2 + 4} \quad \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$

$$\therefore \triangle ABD \text{ 的面积为 } \frac{1}{2} \cdot 8\sqrt{x_0^2 + 4} \cdot \frac{32}{\sqrt{x_0^2 + 4}} = 128$$

$$\text{故 } \triangle ABD \text{ 的面积为定值 } 128. \quad \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

$$\text{方法 2: } \therefore P \text{ 的坐标为 } \left(x_0 - \frac{32}{x_0}, \frac{x_0^2}{4}\right) \quad \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$\therefore |PA| = \left|x_0 - \left(x_0 - \frac{32}{x_0}\right)\right| = \frac{32}{x_0} \quad \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\therefore \triangle ABD \text{ 的面积等于 } S_{\triangle ABP} + S_{\triangle ADP} = \frac{1}{2} \cdot \frac{32}{x_0} \cdot \left|\frac{(x_0+8)^2}{4} - \frac{(x_0-8)^2}{4}\right| = 128$$

$$\text{故 } \triangle ABD \text{ 的面积为定值 } 128. \quad \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

$$\text{方法 3: 设 } BD \text{ 的中点为 } M, \text{ 则 } M\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{\frac{x_1^2}{4} + \frac{x_2^2}{4}}{2}\right), \text{ 即 } M\left(x_0, \frac{x_0^2}{4} + 16\right),$$

$$\text{又 } A\left(x_0, \frac{x_0^2}{4}\right)$$

$$\therefore AM \perp x \text{ 轴, 且 } |AM| = 16. \quad \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\therefore \triangle ABD \text{ 的面积为 } S = S_{\triangle ADM} + S_{\triangle ABM} = \frac{1}{2} |AM| \cdot |x_1 - x_2| = \frac{1}{2} \times 16 \times |x_0 + 8 - (x_0 - 8)| = 128.$$

$$\text{故 } \triangle ABD \text{ 的面积为定值 } 128. \quad \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

解法 4: 先证明下面三角形的面积公式.

设  $\triangle MTS$  中,  $\overrightarrow{TM} = (a, b), \overrightarrow{TS} = (c, d)$ .

$$\text{则 } \triangle MTS \text{ 的面积为 } S = \frac{1}{2} |\overrightarrow{TM}| \cdot |\overrightarrow{TS}| \sin \angle MTS = \frac{1}{2} |\overrightarrow{TM}| \cdot |\overrightarrow{TS}| \sin \angle MTS$$

$$= \frac{1}{2} |\overrightarrow{TM}| \cdot |\overrightarrow{TS}| \sqrt{1 - \cos^2 \angle MTS} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{TM}| \cdot |\overrightarrow{TS}| \sqrt{1 - \left(\frac{\overrightarrow{TM} \cdot \overrightarrow{TS}}{|\overrightarrow{TM}| \cdot |\overrightarrow{TS}|}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{TM}|^2 \cdot |\overrightarrow{TS}|^2 - (\overrightarrow{TM} \cdot \overrightarrow{TS})^2} = \frac{1}{2} \sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) - (ac + bd)^2}$$

$$= \frac{1}{2} |ad - bc|. \quad \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\therefore \vec{AB} = (8, 4x_0 + 16), \quad \vec{AD} = (-8, -4x_0 + 16).$$

$$\therefore \triangle ABD \text{ 的面积为 } S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} |8 \times (-4x_0 + 16) - (-8) \times (4x_0 + 16)| = 128.$$

$$\therefore \triangle ABD \text{ 的面积为定值 } 128. \quad \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

$$21. \text{ 解: (1) } f(x) \text{ 的定义域为 } (-\infty, -2) \cup (-2, +\infty) \quad \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$$

$$f'(x) = \frac{4e^x}{(x+2)^2} > 0 \quad \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$\therefore f(x) \text{ 的增区间为 } (-\infty, -2), (-2, +\infty), \text{ 无单调递减区间. } \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

注: 无减区间叙述不扣分.

$$(2) g'(x) = \frac{2(x-2)e^x + m(x+2)}{x^3} = \frac{(x+2)}{x^3} \left[ \frac{2(x-2)}{x+2} e^x + m \right] \quad \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$\text{由 (1) 知, } \varphi(x) = \frac{2(x-2)}{x+2} e^x + m \text{ 在 } [0, +\infty) \text{ 上单调递增}$$

$$\text{由 } 0 \leq m < 2 \text{ 知, } \varphi(0) = -2 + m < 0$$

$$\varphi(2) = m \geq 0$$

$$\therefore \exists x_m \in (0, 2] \text{ 使 } \varphi(x_m) = 0 \text{ 且 } x \in [0, x_m) \text{ 时, } \varphi(x) < 0, g'(x) < 0$$

$$x \in (x_m, +\infty) \text{ 时, } \varphi(x) > 0, g'(x) > 0$$

即  $g(x)$  在  $[0, x_m)$  单调递减, 在  $(x_m, +\infty)$  单调递增

$$\therefore g(x) \text{ 在 } [0, +\infty) \text{ 上存在最小值 } A, \text{ 且 } A = g(x_m) \quad \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\text{又 } \varphi(x_m) = 0 \text{ 得: } \frac{2(x_m-2)}{x_m+2} e^{x_m} + m = 0, \text{ 即 } -m = \frac{2(x_m-2)}{x_m+2} e^{x_m}$$

$$\begin{aligned} \therefore A = g(x_m) &= \frac{2e^{x_m} - mx_m - m}{x_m^2} = \frac{2e^{x_m} + (x_m+1) \frac{2(x_m-2)}{x_m+2} e^{x_m}}{x_m^2} = \frac{2e^{x_m} [x_m+2 + (x_m+1)(x_m-2)]}{x_m^2(x_m+2)} \\ &= \frac{2e^{x_m}}{x_m+2} \quad \dots\dots\dots 10 \text{ 分} \end{aligned}$$

$$\text{设 } h(x) = \frac{2e^x}{x+2} (0 < x \leq 2)$$

$$\therefore h'(x) = \frac{2(x+1)e^x}{(x+2)^2} > 0$$

$$\therefore h(x) \text{ 在 } (0, 2] \text{ 上单调递增, } h(0) = 1, h(2) = \frac{e^2}{2}$$

$$\therefore 1 < h(x) \leq \frac{e^2}{2}$$

$$\text{又 } x_m \in (0, 2]$$

$$\text{故 } 1 < A \leq \frac{e^2}{2} \quad \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

$$22. \text{ 解 (1). 由 } \rho = 4\sin\theta \text{ 得: } \rho^2 = 4\rho\sin\theta,$$

$$\text{把 } \begin{cases} \rho^2 = x^2 + y^2 \\ y = \rho\sin\theta \end{cases} \text{ 代入上式得 } x^2 + y^2 - 4y = 0$$

$$\text{所以曲线 } C \text{ 的普通方程为 } x^2 + y^2 - 4y = 0 \quad \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

(2)  $\because$  点  $P(1,2)$  在直线  $l: x+y=3$  上.

$\therefore$  直线  $l$  的参数方程为  $\begin{cases} x=1-\frac{\sqrt{2}}{2}t \\ y=2+\frac{\sqrt{2}}{2}t \end{cases}$  ..... ①. .... 6 分

将①代入曲线  $C$  的普通方程  $(1-\frac{\sqrt{2}}{2}t)^2 + (2+\frac{\sqrt{2}}{2}t)^2 - 4(2+\frac{\sqrt{2}}{2}t) = 0$ .

整理得:  $t^2 - \sqrt{2}t - 3 = 0$

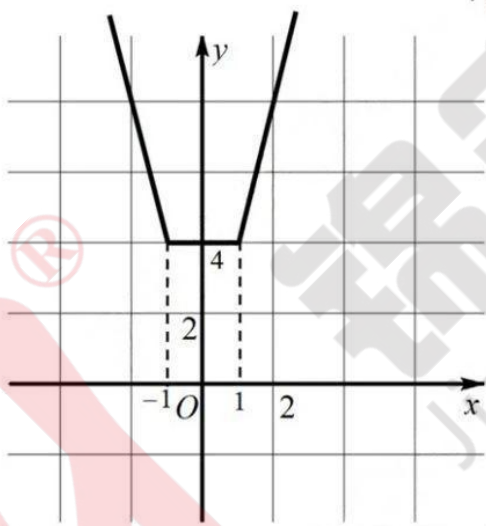
设方程的两根分别为  $t_1, t_2$

$\therefore \begin{cases} t_1+t_2=\sqrt{2} \\ t_1 \cdot t_2=-3 < 0 \end{cases}$  ..... 8 分

$\therefore |\vec{PA}| = |t_1|, |\vec{PB}| = |t_2|, \langle \vec{PA}, \vec{PB} \rangle = 180^\circ, \vec{PA} \cdot \vec{PB} = t_1 t_2$

$\therefore \vec{PA}^2 + \vec{PB}^2 + \vec{PA} \cdot \vec{PB} = t_1^2 + t_2^2 + t_1 \cdot t_2 = (t_1 + t_2)^2 - t_1 \cdot t_2 = 5$ . .... 10 分

23. 解 (1): 当  $a=-2$  时,  $f(x) = |2x-2| + |2x-a| = \begin{cases} -4x, x \leq -1 \\ 4, -1 < x \leq 1 \\ 4x, x > 1 \end{cases}$  ..... 2 分



..... 4 分

由上图可知, 函数  $f(x)$  的值域为  $[4, +\infty)$  ..... 5 分

(2):  $f(x) = |2x-2| + |2x-a| \geq |2x-2 - (2x-a)| = |-2+a| = |a-2|$ .

当且仅当  $(2x-2)(2x-a) \leq 0$  时, 等号成立

$\therefore f(x)$  的最小值为  $|a-2|$  ..... 7 分

$\therefore$  关于  $x$  的不等式  $f(x) + 2a \leq a^2$  有解.

$\therefore |a-2| + 2a \leq a^2$  ..... 8 分

$\therefore \begin{cases} a \geq 2 \\ a-2+2a \leq a^2 \end{cases}$  或  $\begin{cases} a < 2 \\ 2-a+2a \leq a^2 \end{cases}$ .

解得:  $a \geq 2$  或  $a \leq -1$ .

所以  $a$  的取值范围为  $(-\infty, -1] \cup [2, +\infty)$  ..... 10 分