锦宏教育微信公众号：jh985211　　锦宏教育客服微信：18117901643

成都石室中学 2024-2025 年度下期高 2024 届二诊模拟考试
数学试题（理）（A 卷）参考答案

一、选择题：

1.已知复数 $z=\frac{1}{1+\mathrm{i}}$（其中 i 为虚数单位），则 z 的虚部是

A. $-\frac{1}{2}$　　B. $-\frac{1}{2}\mathrm{i}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{1}{2}\mathrm{i}$

1.A　$z=\frac{1}{1+\mathrm{i}}=\frac{1-\mathrm{i}}{2}$,所以 z 的虚部是 $-\frac{1}{2}$.

2.若集合 $A=\{1,2\},B=\left\{y\mid y=x^{\frac{1}{2}}\right\}$，则 $a\in A$ 是 $a\in B$ 的

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件　　C．充要条件　D．既不充分也不必要条件

2.A　$B=[0,+\infty)$，则 A 是 B 的真子集，则 $a\in A$ 是 $a\in B$ 的充分不必要条件.

3.如图是根据某校高三 8 位同学的数学月考成绩（单位：分）画出的茎叶图，其中左边的数字从左到右分别表示学生数学月考成绩的百位数字和十位数字，右边的数字表示学生数学月考成绩的个位数字，则下列结论正确的是

11	8 7 7
12	5 1 3
13	1 2

A.这 8 位同学数学月考成绩的极差是 14

B.这 8 位同学数学月考成绩的中位数是 122

C.这 8 位同学数学月考成绩的众数是 118

D.这 8 位同学数学月考成绩的平均数是 124

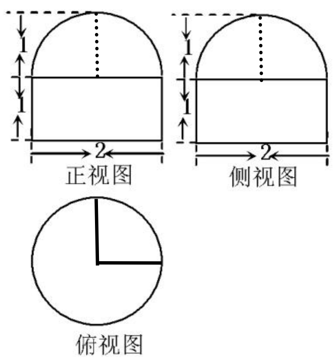
3.B　对于选项 A,极差是 $132-117=15$，故 A 错误;

对于选项 B，中位数是 $\frac{121+123}{2}=122$，故 B 正确;

对于选项 C，众数是 117，故 C 错误;

对于选项 D，平均数是 123，故 D 错误，故选 B.

4.已知一个空间几何体的三视图如图所示，其中正视图、侧视图都是由半圆和矩形组成，则这个几何体的体积是



A. $\frac{3}{2}\pi$　　B. $\frac{5}{3}\pi$　　C. $\frac{7}{3}\pi$　　D. $\frac{9}{2}\pi$

4.A　还原成直观图后，几何体由一个圆柱和八分之三个球组成，故这个几何体的体积 $V=\pi\cdot 1^2\cdot 1+\frac{4}{3}\pi\cdot 1^3\cdot\frac{3}{8}=\frac{3}{2}\pi$.

5.已知数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，且 $a_2+a_3+a_6+a_9+a_{10}=10$，则 a_4+a_8 的值为

A.2　　B.4　　C.6　　D.8

5.B 因为 $a_2+a_3+a_6+a_9+a_{10}=10$，由等差数列的性质，得 $5a_6=10$，$a_6=2$，所以 $a_4+a_8=4$.

6.若 a,b 是正实数，且 $\frac{1}{3a+b}+\frac{1}{2a+4b}=1$，则 $a+b$ 的最小值为

A. $\frac{4}{5}$　　B. $\frac{2}{3}$　　C. 1　　D. 2

6.A 因为 $a+b=\frac{1}{5}[(3a+b)+(2a+4b)]\cdot 1=\frac{1}{5}[(3a+b)+(2a+4b)]\cdot\left(\frac{1}{3a+b}+\frac{1}{2a+4b}\right)$

$=\frac{1}{5}\left(2+\frac{2a+4b}{3a+b}+\frac{3a+b}{2a+4b}\right)\geq\frac{4}{5}$，当且仅当 $a=\frac{3}{5},b=\frac{1}{5}$ 时取等号，所以 $a+b$ 的最小值为 $\frac{4}{5}$.

7.当 $0<x\leq\frac{\pi}{2}$ 时，关于 x 的不等式 $(2a\sin x+\cos 2x-3)(\sin x-x)\leq 0$ 有解，则 a 的最小值是

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. $4\sqrt{2}$

7.A 当 $0<x\leq\frac{\pi}{2}$ 时，$\sin x<x$，所以 $2a\sin x+\cos 2x-3\geq 0$ 在 $0<x\leq\frac{\pi}{2}$ 上有解，

所以 $2a\sin x\geq 3-\cos 2x=2+2\sin^2 x$，所以 $a\geq\left(\frac{1}{\sin x}+\sin x\right)_{\min}$.由 $\frac{1}{\sin x}+\sin x\geq 2$，当且仅当 $x=\frac{\pi}{2}$ 时取等号，所以 a 的最小值是 2.

8.在 2023 年成都“世界大学生运动会”期间，组委会将甲，乙，丙，丁四位志愿者分配到 A,B,C 三个场馆执勤，若每个场馆至少分到一人，且甲不能被分配到 A 场馆，则不同分配方案的种数是

A. 48　　B. 36　　C. 24　　D. 12

8. C 分两种情况：第一种情况，甲单独一人执勤一个场馆，共有 $C_2^1C_3^2A_2^2=12$ 种；第二种情况，甲和另一个人一起执勤一个场馆，共有 $C_3^1C_2^1A_2^2=12$ 种，则共有 24 种.

9. 已知抛物线 $y^2=4x$，弦 AB 过其焦点，分别过弦的端点 A,B 的两条切线交于点 C，点 C 到直线 AB 距离的最小值是

A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. 1　　D. 2

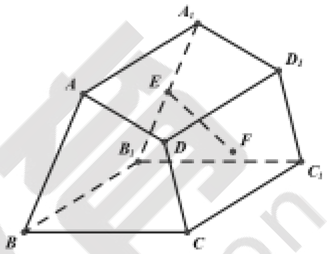
9.D 设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，设过 A 处的直线是 $y-y_1=k(x-x_1)$，联立 $y-y_1=k(x-x_1)$，$y^2=4x$ 得

$y^2-\frac{4}{k}y+\frac{4}{k}y_1-4x_1=0$，$\Delta=0$，即 $\frac{16}{k^2}-\frac{16}{k}y_1+4y_1^2=0,\left(\frac{4}{k}-2y_1\right)^2=0,k=\frac{2}{y_1}$，则在 A 处的切线方程为

$y_1y=2x_1+2x$，同理，B 处的切线方程为 $y_2y=2x_2+2x$，设交点 C 的坐标为 (x_0,y_0)，点 $C(x_0,y_0)$ 在两条切线上，所以 $y_1y_0=2x_1+2x_0$，$y_2y_0=2x_2+2x_0$，则直线 AB 的方程是 $yy_0=2x+2x_0$.又 AB 过其焦点

$(1{,}0)$，易知交点 C 的轨迹是 $x=-1$，所以 $C(-1,y_0)$，AB：$yy_0=2x-2$，所以交点 C 到直线 AB 的距离是 $d=\dfrac{|-2-y_0^2-2|}{\sqrt{4+y_0^2}}=\sqrt{4+y_0^2}$，所以当 $y_0=0$ 时 d 的最小值为 2.

10.如图，四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E 为棱 A_1B_1 的中点，F 为四边形 DCC_1D_1 对角线的交点，下列说法：



①EF //平面 BCC_1B_1；

②若 EF //平面 ADD_1A_1，则 BC // AD；

③若四边形 $ABCD$ 矩形，且 $EF\perp D_1C_1$，则四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 为直四棱柱.

其中正确说法的个数是

A. 0　　　　B.1　　　　C.2　　　　D.3

10.C　对于①，若 EF //平面 BCC_1B_1，过 F 作 CC_1 的平行线交 C_1D_1 于其中点 H，为连接 EH，由于 FH //平面 BCC_1B_1，且 EF //平面 BCC_1B_1，所以平面 EFH //平面 BCC_1B_1，所以 EH //平面 BCC_1B_1，所以 EH // C_1B_1.当 A_1D_1 与 C_1B_1 不平行时，EH // C_1B_1 不成立.①是假命题.

对于②，同①，EH // C_1B_1，则 BC // AD.②是真命题.

对于③，四边形 $ABCD$ 矩形，所以 $AD//BC$.又 $DD_1//CC_1$，所以平面 AA_1D_1D //平面 BCC_1B_1，所以四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 可看作 AA_1D_1D 为上底面，BCC_1B_1 为下底面的四棱柱，过 F 作 CC_1 的平行线交 C_1D_1 于点 H，则 H 为 C_1D_1 的中点，连接 EH，由条件有 $EH\perp D_1C_1$，又 $EF\perp D_1C_1$，则 $D_1C_1\perp$ 平面 EFH，则 $FH\perp D_1C_1$，FH // DD_1，所以 $D_1D\perp D_1C_1$，又 $D_1A_1\perp D_1C_1$，所以 $D_1C_1\perp$ 平面 ADD_1A_1，则四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 为直四棱柱.③是真命题.

11.已知函数 $f(x)=2^x+2^{-x}+\cos x+x^2$，若 $a=f(\sqrt{2}),b=f(-e^{\frac{1}{e}}),c=f(\pi^{\frac{1}{\pi}})$，则

A. $c<b<a$　　　　B. $a<c<b$　　　　C. $c<a<b$　　　　D. $b<c<a$

11.B　$f(x)=2^x+2^{-x}+\cos x+x^2$ 是偶函数，$f'(x)=(2^x-2^{-x})\ln 2+(2x-\sin x)>0$，则 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数.构造函数 $g(x)=\dfrac{\ln x}{x}$，则 $g'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$，令 $g'(x)>0$，得 $0<x<\mathrm{e}$，令 $g'(x)<0$，得 $x>\mathrm{e}$，所以 $g(x)$ 在区间 $(0,e)$ 上单调递增，在区间 $(e,+\infty)$ 上单调递减.又 $\dfrac{\ln 2}{2}=\dfrac{\ln 4}{4}$，所以 $g(4)<g(\pi)<g(\mathrm{e})$，

锦宏教育 jinhong Education

所以$\frac{\ln 2}{2}=\frac{\ln 4}{4}<\frac{\ln \pi}{\pi}<\frac{\ln \mathrm{e}}{\mathrm{e}}$，所以$2^{\frac{1}{2}}<\pi^{\frac{1}{\pi}}<e^{\frac{1}{e}}$，所以$f(\sqrt{2})<f(\pi^{\frac{1}{\pi}})<f(\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}})=f(-\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}})$，所以$a<c<b$.

12.若双曲线$C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左、右焦点分别为$F_1,F_2$，过右焦点$F_2$的直线$l$与双曲线$C$交于$A,B$两点，已知$l$的斜率为$k$，$k\in\left(\frac{b}{a},+\infty\right)$，且$|AF_2|=2|F_2B|$，$\angle F_1AB=60^0$，则直线$AB$的斜率是

A. $2\sqrt{3}$　　　B. $\sqrt{3}$　　　C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　　D. 2

12.A 设$|F_2B|=x$，则$|F_2A|=2x$，由双曲线定义，得$|F_1A|=2a+2x,|F_1B|=2a+x$.

在ΔAF_1B中，由余弦定理，得$|F_1B|^2=|F_1A|^2+|AB|^2-2|F_1A||AB|\cos 60^0$，解得$x=\frac{a}{3}$.

在ΔAF_1F_2中，由余弦定理，得$4c^2=|F_1A|^2+|F_2A|^2-2|F_1A||F_2A|\cos 60^0$,解得$e=\frac{\sqrt{13}}{3}$.

法一：令$a=3t(t>0)$，则$c=\sqrt{13}t,b=2t$，$C:\frac{x^2}{9t^2}-\frac{y^2}{4t^2}=1$，设$l$：$x=my-\sqrt{13}t\left(0<m<\frac{2}{3}\right)$，联立

$\frac{x^2}{9t^2}-\frac{y^2}{4t^2}=1$，$x=my+\sqrt{13}t$，得$(4m^2-9)y^2-8\sqrt{13}mty+16t^2=0$，$y_1+y_2=\frac{8\sqrt{13}mt}{4m^2-9},y_1y_2=\frac{16t^2}{4m^2-9}$.由$|AF_2|=2|F_2B|$，得$y_1=-2y_2$，则$m=\frac{1}{2\sqrt{3}}$，所以$k_{AB}=2\sqrt{3}$.

法二：设直线倾斜角l为α，由双曲线第二定义得$|AF_2|=\frac{\frac{b^2}{a}}{1-e\cos\alpha}$，$|BF_2|=\frac{\frac{b^2}{a}}{1+e\cos\alpha}$，又$|AF_2|=2|F_2B|$，则$e=\sqrt{1+k_{AB}^2}\left|\frac{2-1}{1+2}\right|$，又$k\in\left(\frac{b}{a},+\infty\right)$，则$k_{AB}=2\sqrt{3}$.

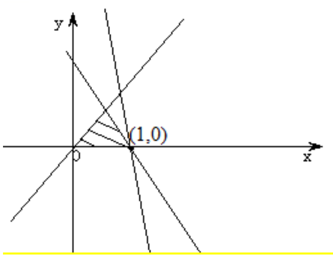
二、填空题：

13.已知向量$\vec{a}=(1,-2)$，$\vec{b}=(2,x)$，若$\vec{a}\perp\vec{b}$，则实数$x=$_________.

13.1 因为$\vec{a}\perp\vec{b}$，所以$1\times 2+(-2)x=0$，解得$x=1$.

14.已知实数x,y满足约束条件$\begin{cases}y\geq 0\\4x+3y\leq 4\\x-y\geq 0\end{cases}$，则$z=3x+2y$的最大值是_________.

14.3 作出x,y满足的可行域如图中阴影部分所示，作出直线$y=-\frac{3}{2}x$并平移，当直线过点$A(1,0)$时，$z_{\max}=3\times 1+2\times 0=3$，所以$z=3x+2y$的最大值是3.



15.已知等比数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，若$S_n=x\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n+27$，则$a_1a_2\cdots a_n$取最大值时，$n$的值为__________.

15.3　等比数列$\{a_n\}$的公比为q，由等比数列前n项和公式$S_n=\frac{a_1}{1-q}-\frac{a_1}{1-q}\cdot q^n$，得$x=-27,q=\frac{1}{3}$.又$a_1=18$，则$a_n=18\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$，$a_2=6,a_3=2,a_4=\frac{2}{3}$，所以$a_1a_2\cdots a_n$取最大值时，$n$的值是3.

16.若$x\geq1$，恒有$\ln\frac{x^2+1}{e^x-mx}\leq e^x-x^2-mx-1$，则$m$的取值范围是_________.

16.$(-\infty,e-2]$　由$\ln\frac{x^2+1}{e^x-mx}\leq e^x-x^2-mx-1$，得$e^x-mx>0$在$x\geq1$上恒成立，即$m\leq e$.

且$\ln\left(x^2+1\right)-\ln\left(e^x-mx\right)\leq\left(e^x-mx\right)-\left(x^2+1\right)$，即$\ln\left(x^2+1\right)+\left(x^2+1\right)\leq\ln\left(e^x-mx\right)+\left(e^x-mx\right)$.因为$y=\ln x+x$在$[1,+\infty)$上是增函数，所以$x^2+1\leq e^x-mx$，所以$m\leq\frac{e^x-x^2-1}{x}$.令$f(x)=\frac{e^x-x^2-1}{x}$，则$f'(x)=\frac{(x-1)(e^x-x-1)}{x^2}\geq0$，所以$f(x)$在$[1,+\infty)$上单调递增，$f(x)_{\min}=f(1)=e-2$，所以$m\leq e-2$.

三、解答题：共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（12分）

为了去库存，某商场举行如下促销活动：有两个摸奖箱，A箱内有1个红球、1个黑球、8个白球，B箱内有4个红球、4个黑球、2个白球，每次摸奖后放回．消费额满300元有一次A箱内摸奖机会，消费额满600元有一次B箱内摸奖机会.每次机会均为从箱子中摸出1个球，中奖规则如下：红球奖50元代金券、黑球奖30元代金券、白球奖10元代金券.

（Ⅰ）某三位顾客各有一次B箱内摸奖机会，求中奖10元代金券人数ξ的分布列;

（Ⅱ）某顾客消费额为600元,请问：这位顾客如何抽奖所得的代金券期望值较大?

解：（Ⅰ）三位顾客每人一次B箱内摸奖中10元代金券的概率都为$\frac{1}{5}$，

中奖10元代金券的人数ξ服从二项分布$B(3,\frac{1}{5})$，

$P(\xi=k)=C_3^k\left(\frac{1}{5}\right)^k\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^{3-k},k=0,1,2,3$， ……………………………………4 分

故 ξ 的分布列为

ξ	0	1	2	3
P	$\frac{64}{125}$	$\frac{48}{125}$	$\frac{12}{125}$	$\frac{1}{125}$

…………6 分

（Ⅱ）可以在 A 箱摸奖 2 次，或者在 B 箱内摸奖 1 次

A 箱摸奖 1 次所得奖金的期望值为 $50\times\frac{1}{10}+30\times\frac{1}{10}+10\times\frac{8}{10}=16$， …………………………8 分

B 箱摸奖 1 次所得奖金的期望值为 $50\times\frac{4}{10}+30\times\frac{4}{10}+10\times\frac{2}{10}=34$， ………………………10 分

A 箱摸奖 2 次所得奖金的期望值为 $2\times16=32$， B 箱摸奖 1 次所得奖金的期望值为 34，

所以这位顾客选 B 箱摸奖 1 次所得奖金的期望值较大．……………………………………………12 分

18.（12 分）

已知 $\begin{cases}\sin x=m,\\ \cos x=\sqrt{3}\lambda-\sqrt{3}m\end{cases}(m\in R)$，设 $f(x)=\lambda$．

（Ⅰ）求函数 $f(x)$ 的对称中心；

（Ⅱ）若 ΔABC 中，角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c， $f(A)=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，且 ΔABC 外接圆的半径为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$， D 是 BC 边的中点，求线段 AD 长度的最大值.

解：（Ⅰ）由 $\begin{cases}\sin x=m\\ \lambda=m+\frac{\sqrt{3}}{3}\cos x\end{cases}$，得 $f(x)=\sin x+\frac{\sqrt{3}}{3}\cos x=\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin(x+\frac{\pi}{6})$.

令 $x+\frac{\pi}{6}=k\pi,k\in Z$,解得 $x=k\pi-\frac{\pi}{6},k\in Z$,所以函数 $f(x)$ 的对称中心为

$(k\pi-\frac{\pi}{6},0)$， $k\in Z$. ……6 分

（Ⅱ）$\because f(A)=\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin(A+\frac{\pi}{6})=\frac{2\sqrt{3}}{3}$， $A\in(0,\pi)\therefore A=\frac{\pi}{3}$，又且 ΔABC 外接圆的半径为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$，则

$a=2\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}\sin A=1$，

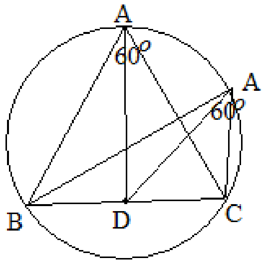
法一：$\therefore$由余弦定理 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$，得 $b^2+c^2-bc=1$.

$2\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$， $4\left|\overrightarrow{AD}\right|^2=\left|\overrightarrow{AB}\right|^2+\left|\overrightarrow{AC}\right|^2+2\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|\cos A$, $4\left|\overrightarrow{AD}\right|^2=c^2+b^2+bc=2\left(c^2+b^2\right)-1$.

由$b^2+c^2-bc=1$，$b^2+c^2\ge 2bc$，得$c^2+b^2\le 2$，即（当且仅当$b=c=1$时等号成立），

$\therefore 4\left|\overrightarrow{AD}\right|^2\le 3$，即$\left|\overrightarrow{AD}\right|_{\max}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，此时，$b=c=1$……………………………12 分

法二：直接画出三角形的外接圆，由图可知，当$AD\perp BC$时，AD 最大，此时ΔABC为等边三角形，所以 AD=$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，所以$AD_{\max}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.



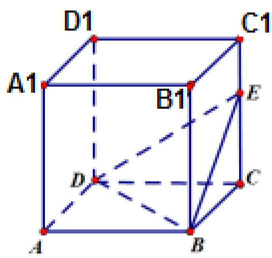
19.（12 分）

如图，棱长为3的正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，E是棱CC_1上靠近C_1的三等分点.

（Ⅰ）求证：A_1C与平面BDE不垂直；

（Ⅱ）在线段BE上是否存在一点F使得平面$B_1D_1F\perp$平面BDE？若存在，请计算$\dfrac{BF}{BE}$的值；若不存在，请说明理由.

解：以D为坐标原点建立如图的空间直角坐标系，



$B(3,3,0),D(0,0,0),E(0,3,2),B_1(3,3,3),D_1(0,0,3),A_1(3,0,3),C(0,3,0)$.

（Ⅰ）$\overrightarrow{DE}=(0,3,2),\overrightarrow{A_1C}=(-3,3,-3)$，

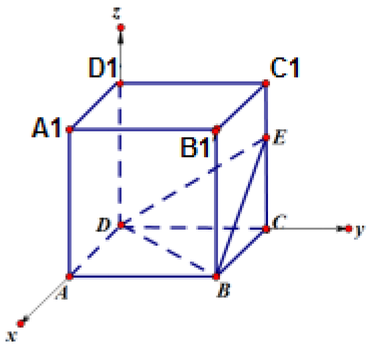
因为$\overrightarrow{A_1C}\cdot\overrightarrow{DE}=(-3,3,-3)\cdot(0,3,2)=3\ne 0$，

所以A_1C与平面BDE不垂直.…………5 分

（Ⅱ）存在点F，且$\dfrac{BF}{BE}=\dfrac{12}{17}$.

设$\overrightarrow{BF}=\lambda\overrightarrow{BE}$，则$F(3-3\lambda,3,2\lambda)$，$\lambda\in[0,1]$.

$\overrightarrow{DB}=(3,3,0),\overrightarrow{DE}=(0,3,2)$，



设平面BDE的法向量为$\vec{n}_1=(x_1,y_1,z_1)$，

则$\begin{cases}\vec{n}_1\cdot\overrightarrow{DB}=3x_1+3y_1=0\\ \vec{n}_2\cdot\overrightarrow{DE}=3y_1+2z_1=0\end{cases}$，

令 $y_1=-2$，得 $\vec{n}_1=(2,-2,3)$.

同理，平面 B_1D_1F 的一个法向量为 $\overrightarrow{n_2}=(2\lambda-3,-2\lambda+3,3\lambda)$.

若平面 $B_1D_1F\perp$ 平面 BDE，则 $\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}=0$，即 $4\lambda-6+4\lambda-6+9\lambda=0,\lambda=\frac{12}{17}$，$\lambda\in[0,1]$.

所以在线段 BE 上存在一点 F 使得平面 B_1D_1F 与平面 BDE 垂直，且 $\overrightarrow{BF}=\frac{12}{17}\overrightarrow{BE}$…………12 分

20.（12 分）

已知点 F 是椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的右焦点，过原点的直线交椭圆 E 于 A,B 两点,ΔABF 面积的最大值为 $\sqrt{3}$，$|OF|=1$.

（Ⅰ）求椭圆 E 的标准方程;

（Ⅱ）已知过点 $P(4,y_0)$ 的直线 l 与椭圆 E 交于 M,N 两点，是否存在定点 P，使得直线 FM,FN 的斜率之和为定值？若存在，求出定点 P 的坐标及该定值.若不存在，请说明理由.

解：（Ⅰ）因为 $S_{\Delta ABF}=\frac{1}{2}|OF||y_A-y_B|\le bc$，当且仅当 A,B 是 y 轴与椭圆的交点时取等号，

所以 $bc=\sqrt{3}$.又 $c=|OF|=1$,所以 $b^2=3,a^2=4$，

所以椭圆 E 的标准方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ ……………………….4 分

（Ⅱ）设直线 l 的方程为 $y=kx+m,\ M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$, 由 $P(4,y_0)$ 在直线 l 上，得 $m=y_0-4k$.

联立 $\begin{cases}y=kx+m\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1\end{cases}$, 化简得 $(4k^2+3)x^2+8kmx+4m^2-12=0$.

由 $\Delta>0$，得 $4k^2+3>m^2$. 由根与系数的关系，得 $\begin{cases}x_1+x_2=\frac{-8km}{4k^2+3}\\ x_1x_2=\frac{4m^2-12}{4k^2+3}\end{cases}$,………………7 分

故直线 FM,FN 的斜率之和为

$$\frac{y_1}{x_1-1}+\frac{y_2}{x_2-1}=\frac{kx_1+m}{x_1-1}+\frac{kx_2+m}{x_2-1}=\frac{2kx_1x_2+(m-k)(x_1+x_2)-2m}{x_1x_2-(x_1+x_2)+1}$$ …………9 分

$$=\frac{-24k-6m}{4k^2+4m^2+8km-9}=\frac{-6y_0}{36k^2+4{y_0}^2-24y_0k-9},$$ ……..11 分

要使上式为定值，则 $y_0=0,$ 故 $P(4,0)$，且 $k_{FM}+k_{FN}=0.$ ……..12 分

21.（12 分）

已知函数 $f(x)=x^2-ax\ ,x>0.$

（Ⅰ）是否存在实数 a 使得 $f(x)\ge 0$ 在区间 $[a,2a+1]$ 上恒成立，若存在，求出 a 的取值范围，若不存在，请说明理由；

（Ⅱ）求函数 $h(x)=f(x)-a^2\ln x$ 在区间 $(1,e^a)$ 上的零点个数(e 为自然对数的底数).

解：（Ⅰ）$f(x)=x^2-ax\ ,x>0.$，因为 $f(x)\ge 0$ 在区间 $[a,2a+1]$ 上恒成立，

所以 $\begin{cases}2a+1>a>0\\ f(a)\ge 0\\ f(2a+1)\ge 0\end{cases}$，所以 $a>0$，

故对任意的 $a>0$ 都能满足 $f(x)\ge 0$ 在区间 $[a,2a+1]$ 上恒成立…………………………4 分

（Ⅱ） 由区间 $(1,e^a)$ 得 $e^a>1$，所以 $a>0$.

$$h'(x)=2x-a-\frac{a^2}{x}=\frac{2x^2-ax-a^2}{x}=\frac{(2x+a)(x-a)}{x}(x>0)$$

所以 $h(x)$ 在 $(0,a)$ 上单调递减，在 $(a,+\infty)$ 上单调递增，$h(x)_{\min}=h(a)=-a^2\ln a$ …….6 分

下面先证明：$0<a<e^a$.

设 $g(a)=e^a-a(a>0)$，则 $g'(a)=e^a-1(a>0)$，

由 $g'(a)=0$ 得 $a=0$，所以 $g(a)$ 在 $[0,+\infty)$ 上是增函数，故 $g(a)\ge g(0)=1>0$.

所以 $e^a>a$. ……………………………7 分

$h(x)_{\min}=h(a)=-a^2\ln a$，

①当 $-a^2\ln a>0$，即 $0<a<1$ 时，函数 $h(x)$ 在 $(1,e^a)$ 上无零点；

②当 $-a^2\ln a=0$，即 $a=1$ 时，函数 $h(x)$ 在 $(1,e^a)$ 上无零点；

③当 $-a^2\ln a<0$，即 $a>1$ 时，$1<a<e^a$，由于 $h(1)=1-a<0$，$h(a)<0$，

$h(e^a)=e^{2a}-ae^a-a^3$，

下面证明 $h(e^a)=e^{2a}-ae^a-a^3>0(a>1)$.

令 $m(x)=e^{2x}-xe^x-x^3(x>1)$，则 $m'(x)=2e^{2x}-e^x-xe^x-3x^2(x>1)$，

令 $\varphi(x)=2e^{2x}-e^x-xe^x-3x^2(x>1)$，则 $\varphi'(x)=4e^{2x}-2e^x-xe^x-6x(x>1)$，

令 $F(x)=4e^{2x}-2e^x-xe^x-6x(x>1)$，

则 $F'(x)=8e^{2x}-3e^x-xe^x-6=(3e^{2x}-3e^x)+(2e^{2x}-xe^x)+(3e^{2x}-6)>0$，

所以 $F(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，$F(x)>F(1)=4e^2-3e-6>0$，

所以 $\varphi(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，$\varphi(x)>\varphi(1)=2e^2-2e-3>0$，

所以 $m(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，$m(x)>m(1)=e^2-e-1>0$，

所以 $h(e^a)=e^{2a}-ae^a-a^3>0(a>1)$，

所以函数 $h(x)$ 在 $(1,e^a)$ 上有一个零点.　……………………………………11 分

综上所述，当 $0<a\le 1$ 时，函数 $h(x)$ 无零点；当 $a>1$ 时，函数 $h(x)$ 有一个零点....12 分

22.（10 分）

在平面直角坐标系 xOy 中，倾斜角为 α 的直线 l 过定点 $(1,0)$，以 O 为极点，x 轴的非负半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C 的极坐标方程为 $\rho\sin^2\theta=4\cos\theta$，直线 l 与曲线 C 相交于不同的两点 A,B.

（Ⅰ）若 $\alpha=\frac{\pi}{3}$，求线段 AB 中点 M 的直角坐标；

（Ⅱ）若 $P(1,0)$，求 $|PA|\cdot|PB|$ 的最小值.

解析：（Ⅰ）曲线 C 的普通方程为 $y^2=4x$　　……1 分

当 $\alpha=\frac{\pi}{3}$ 时，直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=1+\frac{1}{2}t\\ y=\frac{\sqrt{3}}{2}t\end{cases}$（$t$ 为参数），

代入 $y^2=4x$，得 $3t^2-8t-16=0$　　……2 分

设 A，B 对应的参数为 t_1，t_2，则 $t_1+t_2=\dfrac{8}{3}$，　　……3 分

所以 M 对应的参数为 $\dfrac{t_1+t_2}{2}=\dfrac{4}{3}$，　　……4 分

代入参数方程，得点 M 的直角坐标 $(\dfrac{5}{3},\dfrac{2\sqrt{3}}{3})$.　　……5 分

（Ⅱ）将直线 l 的参数方程 $\begin{cases} x=1+t\cos\alpha \\ y=t\sin\alpha \end{cases}$（$t$ 为参数）代入 $y^2=4x$，得 $t^2\sin^2\alpha-4t\cos\alpha-4=0$，

$\therefore |PA|\cdot|PB|=|t_1\cdot t_2|=\dfrac{4}{\sin^2\alpha}\geq 4$，当且仅当 $\alpha=\dfrac{\pi}{2}$ 时取等号，

$\therefore |PA|\cdot|PB|$ 的最小值为 4.　　……10 分

23.（10 分）

已知函数 $f(x)=|x+1|$.

（Ⅰ）求不等式 $f(x)+f(2x-1)<x+7$ 的解集；

（Ⅱ）若对于正实数 a，b，c，满足 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=1$，证明: $f(x-a)+f(x+b+c)\geq 9$.

解：（Ⅰ）$f(x)+f(2x-1)=|x+1|+|2x|$.

当 $x<-1$ 时，$|x+1|+|2x|=-3x-1<x+7$，则 $-2<x<-1$；

当 $-1\leq x\leq 0$ 时，$|x+1|+|2x|=-x+1<x+7$，则 $-1\leq x\leq 0$；

当 $x>0$ 时，$|x+1|+|2x|=3x+1<x+7$，则 $0<x<3$，

综上，不等式 $f(x)+f(2x-1)<x+7$ 的解集是 $\{x|-2<x<3\}$……….5 分

（Ⅱ）由绝对值不等式的性质，可得

$f(x-a)+f(x+b+c)=|x+1-a|+|x+1+b+c|\geq|(x+1-a)-(x+1+b+c)|=a+b+c$，

当且仅当 $(x+1-a)(x+1+b+c)\leq 0$ 取等号.

由于正实数 a，b，c，满足 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=1$，所以 $a+b+c=(a+b+c)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)$

$=3+\left(\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}\right)+\left(\dfrac{c}{a}+\dfrac{a}{c}\right)+\left(\dfrac{c}{b}+\dfrac{b}{c}\right)\geq 9$，

当且仅当 $a=b=c=3$ 时取等号，

此时 $(x+1-a)(x+1+b+c)=(x-2)(x+7)\le 0$，

即 $-7\le x\le 2$，

所以 $f(x-a)+f(x+b+c)\ge 9$，当且仅当 $a=b=c=3$ 且 $-7\le x\le 2$ 取等号.　　………10 分

锦宏教育 Jinhong Education