

## 内江市高中 2024 届第一次模拟考试题

# 数学(理科)参考答案及评分意见

一、选择题(本大题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分.)

1. D 2. B 3. D 4. C 5. A 6. B 7. B 8. A 9. D 10. B 11. A 12. C

二、填空题(本大题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.)

13. 9 14. 10 15. 0.8186 16. ①③④

三、解答题(共 70 分,解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤,第 17~21 题为必考题,每个试题考生都必须作答,第 22、23 题为选考题,考生根据要求作答.)

17. 解:(1) 设等差数列  $\{a_n\}$  的公差为  $d$ , 则 
$$\begin{cases} a_1 + d = 3 \\ 5a_1 + \frac{5 \times 4}{2}d + a_1 + 2d = 30 \end{cases}$$

解得  $\begin{cases} a_1 = 1 \\ b = 2 \end{cases}$  ..... 2 分

所以  $a_n = 1 + 2(n-1) = 2n-1$  ..... 4 分

$S_n = 1 \times n + \frac{n(n-1) \times 2}{2} = n^2$  ..... 6 分

(2) 由(1)得  $a_{n+1} = 2n+1, S_{n+1} = (n+1)^2$ ,

则  $b_n = \frac{a_{n+1}}{S_n \cdot S_{n+1}} = \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}$  ..... 9 分

所以  $T_n = b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}$   
 $= 1 - \frac{1}{(n+1)^2}$  ..... 12 分

18. 解:(1) 为了判断两个函数模型:  $y = \alpha + \beta x^2, y = e^{\lambda x + t}$  拟合程度, 只需要判断两个函数模型  $y = \alpha + \beta u, v = \lambda x + t$  拟合程度即可. .... 1 分

设  $\{u_i\}$  和  $\{y_i\}$  的相关系数为  $r_1, \{x_i\}$  和  $\{v_i\}$  的相关系数为  $r_2$ ,

由题意  $r_1 = \frac{\sum_{i=1}^{10} (u_i - u)(y_i - y)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{10} (u_i - u)^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{10} (y_i - y)^2}} = \frac{260}{150 \times 2} \approx 0.87$  ..... 2 分

$r_2 = \frac{\sum_{i=1}^{10} (x_i - x)(v_i - v)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{10} (x_i - x)^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{10} (v_i - v)^2}} = \frac{18}{10 \times 2} = 0.9$  ..... 3 分

显然  $r_2 > r_1 > 0$ , 因此从相关系数的角度, 模型  $y = e^{\lambda x + t}$  的拟合程度更好 ..... 4 分

(2) 先建立  $v$  关于  $x$  的线性回归方程, 由  $y = e^{\lambda x + t}$  得,  $\ln y = \lambda x + t$ , 即  $v = \lambda x + t$ ,

$\lambda = \frac{\sum_{i=1}^{10} (x_i - x)(v_i - v)}{\sum_{i=1}^{10} (x_i - x)^2} = \frac{18}{100} = 0.18, t = v - \lambda x = 5.36 - 0.18 \times 26 = 0.68$  ..... 6 分

所以  $v$  关于  $x$  的线性回归方程为  $\hat{v} = 0.18x + 0.68$ , 即  $\ln y = 0.18x + 0.68$  ..... 7 分

所求回归方程为  $\hat{y} = e^{0.18x + 0.68}$  ..... 8 分

(3) 若 2024 年盈利额为 800 亿元, 即  $800 = e^{0.18x + 0.68}$ ,  $\ln 800 = 0.18x + 0.68$ ,

$$\because \ln 800 = 5\ln 2 + 2\ln 5 = 5 \times 0.693 + 2 \times 1.609 = 6.683 \quad \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\therefore 6.683 = 0.18x + 0.68, \text{ 解得 } x = 33.35$$

$$\text{所以 2024 年的研发资金投入额约为 33.35 亿元} \quad \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

$$19. \text{ 解: (1) 当 } a=1 \text{ 时, } f'(x) = \frac{(x+1)(x-1)}{x} (x>0)$$

$$\text{令 } f'(x) = 0 \text{ 得 } x=1 \quad \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\because \text{ 当 } x \in (0, 1) \text{ 时, } f'(x) < 0, f(x) \text{ 单调递减, 当 } x \in (1, +\infty) \text{ 时, } f'(x) > 0, f(x) \text{ 单调递增,}$$

$$\therefore f(x)_{\text{极小值}} = f(1) = \frac{1}{2}, \text{ 无极大值} \quad \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$(2) f(x) \geq (1-a)x + 1, \text{ 即 } \frac{1}{2}a^2 - \ln x \geq (1-a)x + 1, \text{ 即 } a(x^2 + 2x) \geq 2\ln x + 2x + 2,$$

$$\because x > 0, \text{ 即 } x^2 + 2x > 0$$

$$\therefore \text{ 原问题等价于 } a \geq \frac{2(\ln x + x + 1)}{x^2 + 2x} \text{ 在 } (0, +\infty) \text{ 上恒成立,}$$

$$\text{设 } g(x) = \frac{2(\ln x + x + 1)}{x^2 + 2x}, x \in (0, +\infty), \text{ 则只需 } a \geq g(x)_{\max} \quad \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$g'(x) = -\frac{2(x+1)(x+2\ln x)}{(x^2+2x)^2}, \quad \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$\text{令 } h(x) = x + 2\ln x, \text{ 易知 } h(x) \text{ 在 } (0, +\infty) \text{ 上单调递增}$$

$$\because h(1) = 1 > 0, h\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + 2\ln \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - 2\ln 2 = \ln \sqrt{e} - \ln 4 < 0,$$

$$\therefore \text{ 存在唯一的 } x_0 \in \left(\frac{1}{2}, 1\right), \text{ 使得 } h(x_0) = x_0 + 2\ln x_0 = 0, \quad \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\because \text{ 当 } x \in (0, x_0) \text{ 时, } h(x) < 0, g'(x) > 0, g(x) \text{ 单调递增,}$$

$$\text{当 } x \in (x_0, +\infty) \text{ 时, } h(x) > 0, g'(x) < 0, g(x) \text{ 单调递减}$$

$$\therefore g(x)_{\max} = g(x_0) = \frac{2\ln x_0 + 2x_0 + 2}{x_0^2 + 2x_0} = \frac{-x_0 + 2x_0 + 2}{x_0^2 + 2x_0} = \frac{x_0 + 2}{x_0^2 + 2x_0} = \frac{1}{x_0} \quad \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\therefore a \geq \frac{1}{x_0} \text{ 即可}$$

$$\because x_0 \in \left(\frac{1}{2}, 1\right), \therefore \frac{1}{x_0} \in (1, 2), \text{ 故整数 } a \text{ 的最小值为 } 2 \quad \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

$$20. \text{ 解: (1) } \because b \sin \frac{B+C}{2} = a \sin B$$

$$\therefore b \sin \frac{\pi - A}{2} = a \sin B, \text{ 即 } b \cos \frac{A}{2} = a \sin B$$

$$\text{由正弦定理得, } \sin B \cos \frac{A}{2} = \sin A \sin B, \text{ 即 } \sin B \cos \frac{A}{2} = 2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} \sin B \quad \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$\because A, B \in (0, \pi), \therefore \sin B > 0, \cos \frac{A}{2} > 0$$

$$\therefore \sin \frac{A}{2} = \frac{1}{2}, \text{ 又 } \frac{A}{2} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \therefore \frac{A}{2} = \frac{\pi}{6}, \text{ 即 } A = \frac{\pi}{3} \quad \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$(2) \text{ 若选①: 设 } \triangle ABC \text{ 外接圆半径为 } R, \text{ 则根据正弦定理 } \frac{a}{\sin A} = 2R$$

$$\text{有 } R = \frac{6}{2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}} = 2\sqrt{3} \quad \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$



$M$  为  $\triangle ABC$  的外心, 则  $AM$  为外接圆半径,  $AM = 2\sqrt{3}$

与已知  $AM = 4$  矛盾, 故不能选①; ..... 7 分  
若选②:

$\because M$  为  $\triangle ABC$  的重心, 则  $D$  为线段  $BC$  的中点且  $AD = \frac{3}{2}AM = 3\sqrt{3}$  ..... 6 分

$$\therefore |\vec{AD}|^2 = \frac{1}{4}(|\vec{AB}|^2 + |\vec{AC}|^2 + 2|\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}| \cdot \cos A),$$

$$\text{即 } 27 = \frac{1}{4}(c^2 + b^2 + bc) \quad (\text{i}) \quad \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\text{又由余弦定理得 } a^2 = b^2 + c^2 - bc \cdot \cos A, \text{ 即 } 36 = b^2 + c^2 - bc \quad (\text{ii}) \quad \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$\text{联立 } (\text{i}) (\text{ii}) \text{ 得 } bc = 36 \quad \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2} \times 36 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3} \quad \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

若选③:

$\because M$  为  $\triangle ABC$  的内心, 则  $\angle BAD = \angle CAD = \frac{\pi}{6}$  ..... 6 分

$$\text{由 } S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle ACD} \text{ 有 } \frac{1}{2}bc \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}c \cdot AD \cdot \sin \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2}b \cdot AD \cdot \sin \frac{\pi}{6}$$

$$\because AD = 3\sqrt{3} \quad \therefore \frac{\sqrt{3}}{2}bc = 3\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2}(b+c), \text{ 即 } b+c = \frac{bc}{3} \quad (\text{i}) \quad \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\text{由余弦定理可得 } 36 = b^2 + c^2 - bc, \text{ 即 } 36 = (b+c)^2 - 3bc \quad (\text{ii}) \quad \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$\text{联立 } (\text{i}) (\text{ii}) \text{ 得 } bc = 36 \quad \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2} \times 36 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3} \quad \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

$$21. \text{ 解: (1) 当 } m=2 \text{ 时, } f(x) = x - \frac{1}{2}\sin x - \ln x + 1, f'(x) = 1 - \frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{x} \quad \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$$

$$\text{当 } x \in (\pi, +\infty) \text{ 时, } f'(x) = 1 - \frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{x} \geq 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} > 0 \quad \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

所以, 当  $m=2$  时, 函数  $f(x)$  在  $(\pi, +\infty)$  上单调递增 ..... 4 分

(2) 不妨设  $0 < x_1 < x_2$ , 由  $f(x_1) = f(x_2)$  得

$$x_1 - \frac{1}{2}\sin x_1 - \frac{m}{2}\ln x_1 + 1 = x_2 - \frac{1}{2}\sin x_2 - \frac{m}{2}\ln x_2 + 1,$$

$$\therefore \frac{m}{2}(\ln x_2 - \ln x_1) = x_2 - x_1 - \frac{1}{2}(\sin x_2 - \sin x_1). \quad \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

设  $g(x) = x - \sin x$ , 则  $g'(x) = 1 - \cos x \geq 0$ , 故  $g(x)$  在  $(0, +\infty)$  上为增函数,

$$\therefore x_2 - \sin x_2 > x_1 - \sin x_1, \text{ 从而 } x_2 - x_1 > \sin x_2 - \sin x_1,$$

$$\therefore \frac{m}{2}(\ln x_2 - \ln x_1) = x_2 - x_1 - \frac{1}{2}(\sin x_2 - \sin x_1) > \frac{1}{2}(x_2 - x_1)$$

$$\therefore m > \frac{x_2 - x_1}{\ln x_2 - \ln x_1} \quad \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

要证  $x_1 x_2 < m^2$ , 只要证  $m > \sqrt{x_1 x_2}$

$$\text{下面证明: } \frac{x_2 - x_1}{\ln x_2 - \ln x_1} > \sqrt{x_1 x_2}, \text{ 即证 } \frac{\frac{x_2}{x_1} - 1}{\ln \frac{x_2}{x_1}} > \sqrt{\frac{x_2}{x_1}} \quad \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

令  $t = \frac{x_2}{x_1}$ , 则  $t > 1$ , 即证明  $\frac{t-1}{\ln t} > \sqrt{t}$ , 只要证明:  $\ln t - \frac{t-1}{\sqrt{t}} < 0$  ..... 9 分

设  $h(t) = \ln t - \frac{t-1}{\sqrt{t}}$ , 得  $h'(t) = -\frac{(\sqrt{t}-1)^2}{2t\sqrt{t}} < 0$ , 则  $h(t)$  在  $(1, +\infty)$  上单调递减,

当  $t > 1$  时,  $h(t) < h(1) = 0$ , 从而  $\ln t - \frac{t-1}{\sqrt{t}} < 0$  得证, ..... 11 分

$\therefore x_1 x_2 < m^2$  ..... 12 分

22. 解: (1) 设  $P$  的极坐标为  $(\rho, \theta)$  ( $\rho > 0$ ),  $M$  的极坐标为  $(\rho_1, \theta)$  ( $\rho_1 > 0$ ) ..... 1 分

由已知得  $\rho \cdot \rho_1 = 16$ , 即  $\rho \cdot \frac{4}{\cos \theta} = 16$ , 得  $C_2$  的极坐标方程为  $\rho = 4 \cos \theta$  ( $\rho > 0$ ) ..... 3 分

所以  $C_2$  的直角坐标方程为  $(x-2)^2 + y^2 = 4$  ( $x \neq 0$ ) ..... 5 分

(备注, 没有  $x \neq 0$  扣 1 分)

(2) 设点  $B$  的极坐标为  $(\rho_B, \alpha)$  ( $\rho_B > 0$ ), 由题设知  $|OA| = 2, \rho_B = 4 \cos \alpha$  ..... 6 分

于是  $S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2} |OA| \cdot \rho_B \cdot \sin \angle AOB = 4 \cos \alpha \cdot \left| \sin(\alpha - \frac{\pi}{3}) \right|$   
 $= 2 \left| \sin(2\alpha - \frac{\pi}{3}) - \frac{\sqrt{3}}{2} \right|$  ..... 8 分

因为  $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ , 所以  $-\frac{4\pi}{3} \leq 2\alpha - \frac{\pi}{3} \leq \frac{2\pi}{3}$

所以当  $\alpha = -\frac{\pi}{12}$  时,  $S$  取得最大值  $2 + \sqrt{3}$ , 所以  $\triangle OAB$  面积的最大值为  $2 + \sqrt{3}$  ..... 10 分

23. 解: (1) 证明: 因为  $a+b+c=3$ , 且  $a, b, c$  都是正数

所以  $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+c} = \frac{1}{6} [(a+b) + (b+c) + (a+c)] (\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+c})$  ..... 2 分

$= \frac{1}{6} [3 + (\frac{b+c}{a+b} + \frac{a+b}{b+c}) + (\frac{b+c}{a+c} + \frac{a+c}{b+c}) + (\frac{a+b}{a+c} + \frac{a+c}{a+b})]$  ..... 3 分

$\geq \frac{1}{6} (3 + 2 + 2 + 2) = \frac{3}{2}$  ..... 4 分

(当且仅当  $a=b=c=1$  时取等号)

所以  $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+c} \geq \frac{3}{2}$  得证 ..... 5 分

(2) 因为  $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac \leq 3a^2 + 3b^2 + 3c^2$  ..... 7 分

所以  $a^2 + b^2 + c^2 \geq 3$  (当且仅当  $a=b=c=1$  时取等号)

所以  $(a^2 + b^2 + c^2)_{\min} = 3$  ..... 8 分

由题意得  $-x^2 + mx + 2 \leq 3$  恒成立, 即  $x^2 - mx + 1 \geq 0$  恒成立 ..... 9 分

因此  $\Delta = m^2 - 4 \leq 0$ , 即  $-2 \leq m \leq 2$ , 故存在实数  $m \in [-2, 2]$  使不等式成立 ..... 10 分