宜宾市高2021级一诊考试理科数学参考答案

说明：

一、本解答给出了一种解法供参考，如果考生的解法与本解答不同，可比照评分意见制订相应的评分细则.

二、对计算题，当考生的解答在某一步出现错误时，如果后继部分的解答未改变该题的内容和难度，可视影响的程度决定后继部分的给分，但不得超过该部分正确解答应得分数的一半，如果后继部分的解答有较严重的错误，就不再给分.

三、解答右端所注分数，表示考生正确做到这一步应得的累加分数.

四、只给整数分数，选择题和填空题不给中间分.

一、选择题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	A	C	C	D	B	D	C	A	A	B	B	C

二、填空题

13．3　　14．0　　15．$\dfrac{5}{4}$　　16．$\dfrac{25\pi}{8}$

三、解答题

(一) 必考题：

17．解：(1) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，由 $a_2+a_7=9$ 得：

$(a_1+d)+(a_1+6d)=9$　　①

又 $\because$　$S_9=45$

$\therefore$　$a_1+4d=5$　　②

联立①②有 $\begin{cases} a_1=1 \\ d=1 \end{cases}$

$\therefore a_n=a_1+(n-1)d=n$ ……………………………………………………………(6分)

(2) 由 (1) 知 $a_n=n$

$\therefore b_n=2^n a_n=n\cdot 2^n$

所以 $T_n=1\times 2^1+2\times 2^2+3\times 2^3+\cdots+n\times 2^n$，③

$2T_n=1\times 2^2+2\times 2^3+\cdots+(n-1)\times 2^n+n\times 2^{n+1}$，④

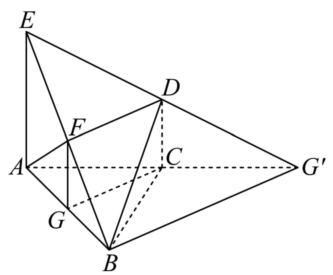
由③－④有 $-T_n=2^1+2^2+3^3+\cdots+2^n-n\times 2^{n+1}=\dfrac{2\times[1-2^n]}{1-2}-n\times 2^{n+1}$，

$=2^{n+1}-2-n\times 2^{n+1}$，

$\therefore -T_n=(1-n)2^{n+1}-2$，$n\in \mathrm{N}^*$.

$\therefore T_n=2+(n-1)2^{n+1}$……………………………………(12分)

18．证明：(1) 如图所示，取 AB 中点 G，连 CG、FG.



$\because EF=FB$，$AG=GB$，$\therefore FG \stackrel{\parallel}{=} \dfrac{1}{2}EA$

$DC \stackrel{\parallel}{=} \dfrac{1}{2}EA$，$\therefore FG \stackrel{\parallel}{=} DC$

$\therefore$ 四边形 $CDFG$ 为平行四边形，$\therefore DF /\!/ CG$

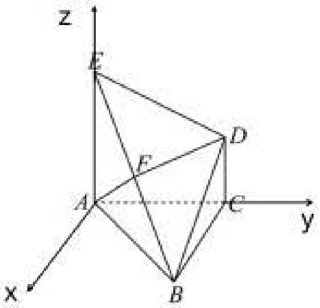
$\because DF \not\subset$ 平面 ABC，$CG \subset$ 平面 ABC

$\therefore DF /\!/$ 平面 ABC ……………………………………(5 分)

(2)过 A 作 $AM \perp AC$, 以 AM,AC,AE 为 x,y,z 轴建立空间直角坐标系 $A-xyz$,

则 $B(\sqrt{3},1,0)$,$E(0,0,2)$,$D(0,2,1)$

$\overrightarrow{BE}=(-\sqrt{3},-1,2)$,$\overrightarrow{DE}=(0,-2,1)$



设平面 BDE 的一个法向量 $\overrightarrow{n_1}=(x,y,z)$

则 $\begin{cases}-\sqrt{3}x-y+2z=0\\-2y+z=0\end{cases}$,

令 $y=1$ 得 $z=2,x=\sqrt{3}$,即 $\overrightarrow{n_1}=(\sqrt{3},1,2)$

$AE \perp$ 平面 ABC,

则可取平面 ABC 的一个法向量 $\overrightarrow{n_2}=(0,0,1)$,

$\cos<\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}>=\dfrac{2}{\sqrt{8}\times 1}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,

平面 BDE 与平面 ABC 所成角的正弦值为:$\sqrt{1-\cos^2<\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}>}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ……………(12 分)

(2)另解:证明:$\because EA \perp$ 平面 ABC

$\therefore AE \perp CG$

又 $\triangle ABC$ 是正三角形,G 是 AB 的中点

$\therefore CG \perp AB$

$\therefore CG \perp$ 平面 AEB

又 $\because DF /\!/ CG$

$\therefore DF \perp$ 平面 AEB)

延长 ED 交 AC 延长线于 G',连 BG'

由 $CD=\dfrac{1}{2}AE$, $CD /\!/ AE$ 知,D 为 EG' 的中点

$\therefore DF /\!/ BG'$

又 $CG \perp$ 平面 ABE, $FD /\!/ CG$

$\therefore BG' \perp$ 平面 ABE

$\therefore \angle EBA$ 为所求二面角的平面角

在等腰直角三角形 AEB 中,可得 $\angle ABE=45^\circ$

$\therefore$ 平面 BDE 与平面 ABC 所成的二面角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ……………………………(12 分)

19. 解:(1)从该样本中随机抽取两名学生的竞赛成绩,基本事件总数为 C_{100}^2,设"抽取的两名学生中恰有一名学生获一等奖"为事件 A,

则事件 A 包含的基本事件的个数为 $C_{90}^1C_{10}^1$,因为每个基本事件出现的可能性都相等,

所以 $P(A)=\dfrac{C_{90}^1C_{10}^1}{C_{100}^2}=\dfrac{2}{11}$,即抽取的两名学生中恰有一名学生获奖的概率为 $\dfrac{2}{11}$;…(4 分)

(2)(ⅰ)因为 $\mu+2\delta=85$,所以 $P(X>85)\approx\dfrac{1-0.9545}{2}=0.02275$

故参赛学生中成绩超过 85 分的学生数约为 $0.02275\times 10000=2275$ 人;……………(8 分)

(ⅱ)由 $\mu=65$,得 $P(X>65)=\dfrac{1}{2}$,即从所有参赛学生中堕机抽取 1 名学生,该生竞赛成绩在 65 分以上的概率为 $\dfrac{1}{2}$,所以随机变量服从二项分布 $Y\text{\`{}}B(4,\dfrac{1}{2})$,

所以 $P(Y=0)=C_4^0(\dfrac{1}{2})^4=\dfrac{1}{16}$, $P(Y=1)=C_4^1(\dfrac{1}{2})^4=\dfrac{1}{4}$,$P(Y=2)=C_4^2(\dfrac{1}{2})^4=\dfrac{3}{8}$,$P(Y=3)$

$=C_4^3(\frac{1}{2})^4=\frac{1}{4},P(Y=4)=C_4^4(\frac{1}{2})^4=\frac{1}{16}$

随机变量的分布列为:

Y	0	1	2	3	4
P	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$

$\therefore E(Y)=4\times\frac{1}{2}=2$ ………………………………………………………………(12分)

20. 解:(1) 点 P 到 E 的焦点 F 的距离为 5, 即点 P 到 E 的准线的距离为 5,

故 $4+\frac{p}{2}=5$,解得 $p=2$. 所以 E 的标准方程为 $y^2=4x$; ……………………………(5分)

(2) 由 (1) 知, $y_0^2=4\times4$,且 $y_0>0$,解得 $y_0=4$,所以 $P(4,4)$.

设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$,则 $k_{PA}=\frac{y_1-4}{x_1-4}=\frac{y_1-4}{\frac{y_1^2}{4}-4}=\frac{4}{y_1+4}$,同理可得, $k_{PB}=\frac{4}{y_2+4}$,

则 $k_{PA}\times k_{PB}=\frac{4}{y_1+4}\times\frac{4}{y_2+4}=-1$,即 $4(y_1+y_2)+y_1y_2+32=0$.

当直线 AB 斜率存在时,直线 AB 的方程为 $y-y_1=\frac{y_1-y_2}{\frac{y_1^2}{4}-\frac{y_2^2}{4}}\left(x-\frac{y_1^2}{4}\right)$,

整理得 $4x-(y_1+y_2)y+y_1y_2=0$

所以 $4x-32-(y_1+y_2)(y+4)=0$,即 $y+4=\frac{4}{y_1+y_2}(x-8)$

所以直线 AB 过定点 $(8,-4)$;

当直线 AB 的斜率不存在时 $y_1+y_2=0$,可得 $y_1^2=32,x_1=8$.

故直线 AB 过定点 $(8,-4)$. ………………………………………………………………(12分)

21. 解:(1)$f'(x)=-\ln x,f'\left(\frac{1}{e}\right)=1,f\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{2}{e}-1$,

切线方程为: $y-\frac{2}{e}+1=1\cdot\left(x-\frac{1}{e}\right)$ $g(x)=x+\frac{1}{e}-1$

令 $h(x)=g(x)-f(x)=\frac{1}{e}+x\ln x$

$h'(x)=\ln x+1,h'(x)=0\Rightarrow x=\frac{1}{e}$

$\therefore h(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{e}\right)$ 单调递减,在 $\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$ 上单调递增

$\therefore h(x)\geqslant h\left(\frac{1}{e}\right)=0$,即 $g(x)\geqslant f(x)$ ………………………………………………(5分)

(2) $\because f'(x)=-\ln x,f'(x)=0\Rightarrow x=1$

$\therefore h(x)$ 在 $(0,1)$ 单调递增,在 $(1,+\infty)$ 单调递减

$\therefore f(x)_{\max}=f(1)=0,x\to0,f(x)\to-1,f(e)=-1,x\to+\infty,f(x)\to-\infty$

$\therefore -1<m<0,0<x_1<1<x_2<e$

先求 $f(x)$ 在 $x=e$ 的切线方程 $\phi(x)$

$f'(e)=-1,f(e)=-1$, $y+1=-1(x-e)$, $\phi(x)=-x+e-1$

下面证明: $\phi(x)\geqslant f(x)$,令 $g(x)=\phi(x)-f(x)=-2x+e+x\ln x$

$g'(x)=\ln x-1,g'(x)=0\Rightarrow x=e,g(x)$ 在 $(0,e)$ 单调递增,在 $(e,+\infty)$ 单调递减

$\therefore g(x)\geqslant g(e)=0\ \therefore \phi(x)\geqslant f(x)$

设 $y=m$ 与 $g(x),\phi(x)$ 交点的横坐标分别为 x_3,x_4

可知 $y=m=f(x_1)\leqslant g(x_1)=x_1+\dfrac{1}{e}-1\Rightarrow m\leqslant x_1+\dfrac{1}{e}-1$，即 $x_1\geqslant m-\dfrac{1}{e}+1$ ①

可知 $y=m=f(x_2)\leqslant \phi(x_2)=-x_2+e-1\Rightarrow -x_2\geqslant m+1-e$，即 $-x_2\geqslant m+1-e$ ②

因为上式两等号不能同时成立，由①+②得：

$x_1-x_2>2m+2-e-\dfrac{1}{e}$ ……………………………………………………………………(12分)

(二)选考题：

22．解：(1) 将 $x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$ 代入 $y=x(x\geqslant 0)$ 得 $\rho\sin\theta=\rho\cos\theta$，

所以 $\tan\theta=1$，所以射线 l 的极坐标方程为 $\theta=\dfrac{\pi}{4}(\rho\geqslant 0)$，

将 $x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$ 代入 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 得 $\rho^2\sin^2\theta+\dfrac{\rho^2\cos^2\theta}{4}=1$，

所以曲线 C 的极坐标方程为 $\rho^2=\dfrac{4}{1+3\sin^2\theta}$ ……………………………………………………(5分)

(2) 由题意可设点 P 的极坐标为 $\left(\rho_1,\dfrac{\pi}{4}\right)$，点 Q 的极坐标为 $\left(\rho_2,\dfrac{3\pi}{4}\right)$，

则 $\rho_1^2=\dfrac{4}{1+3\sin^2\dfrac{\pi}{4}}=\dfrac{8}{5}$，$\rho_2^2=\dfrac{4}{1+3\sin^2\dfrac{3\pi}{4}}=\dfrac{8}{5}$，

因为 $\rho_1>0$，$\rho_2>0$，所以 $\rho_1=\rho_2=\dfrac{2\sqrt{10}}{5}$，

所以 $S_{\triangle POQ}=\dfrac{1}{2}\rho_1\rho_2=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2\sqrt{10}}{5}\times\dfrac{2\sqrt{10}}{5}=\dfrac{4}{5}$.……………………………………………(10分)

23．解：(1) 由题意可得，$f(x)=|2x-1|+|2x+1|=\begin{cases}4x, x>\dfrac{1}{2}\\ 2, -\dfrac{1}{2}\leqslant x\leqslant\dfrac{1}{2}\\ -4x, x<-\dfrac{1}{2}\end{cases}$，

则 $f(x)\geqslant 3$，即 $\begin{cases}4x\geqslant 3\\ x>\dfrac{1}{2}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}2\geqslant 3\\ -\dfrac{1}{2}\leqslant x\leqslant\dfrac{1}{2}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}-4x\geqslant 3\\ x<-\dfrac{1}{2}\end{cases}$，

解得 $x\geqslant\dfrac{3}{4}$ 或 $x\in\varnothing$ 或 $x\leqslant-\dfrac{3}{4}$，

所以不等式的解集为 $\left\{x\middle|x\leqslant-\dfrac{3}{4}\text{ 或 }x\geqslant\dfrac{3}{4}\right\}$. ……………………………………………(5分)

(2) 由 (1) 可知，$f(x)_{\min}=2$，所以 $m=2$，则 $a+2b+3c=2$，

即 $a+c+2(b+c)=2$，$\dfrac{1}{a+c}+\dfrac{1}{b+c}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{a+c}+\dfrac{1}{b+c}\right)[(a+c)+2(b+c)]$

$=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2(b+c)}{a+c}+\dfrac{a+c}{b+c}\right)+\dfrac{3}{2}\geqslant\sqrt{2}+\dfrac{3}{2}$，

当且仅当 $\dfrac{2(b+c)}{a+c}=\dfrac{a+c}{b+c}$，$(a+c)^2=2(b+c)^2$，

即 $a+c=2\sqrt{2}-2$，$b+c=2-\sqrt{2}$ 时，等号成立.

故 $\left(\dfrac{1}{a+c}+\dfrac{1}{b+c}\right)_{\min}=\sqrt{2}+\dfrac{3}{2}$ ……………………………………………………(10分)