

理科数学

本试题卷共4页,满分150分,考试时间120分钟。

注意事项:

1. 答卷前,考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其它答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题:本题共12小题,每小题5分,共60分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 已知复数 $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbf{R}$, i 为虚数单位), 且 $(1 + ai)i = 1 + bi$, 则复数 z 在复平面内的对应点 Z 在 .

A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

2. 若集合 $M = \{y \mid y = 2^x\}$, $N = \{x \mid y = \sqrt{1 - 2x}\}$, 则 $M \cap N =$

A. $(0, \frac{1}{2}]$ B. $[0, \frac{1}{2}]$
C. $(0, +\infty)$ D. $[0, +\infty)$

3. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $a_1 + a_3 = 30$, $S_4 = 120$, 则其公比 $q =$

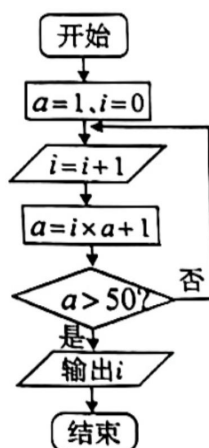
A. 1 B. 2
C. 3 D. 1 或 3

4. 执行如图所示的程序框图, 则输出 i 的值为

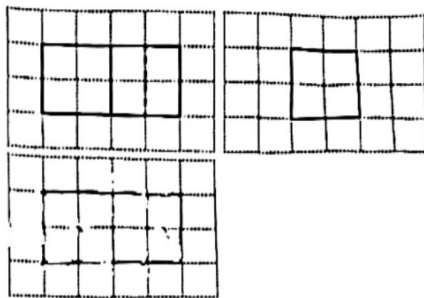
A. 3 B. 4
C. 5 D. 6

5. 已知奇函数 $f(x) = a^x + b \cdot a^{-x}$ ($a > 0, a \neq 1$) 在 $[-1, 1]$ 上的最大值为 $\frac{8}{3}$, 则 $a =$

A. $\frac{1}{3}$ 或 3 B. $\frac{1}{2}$ 或 2 C. 3 D. 2



6. 如图,网格纸上绘制的是一个多面体的三视图,网格小正方形的边长为1,则该多面体的体积为



- A. 6 B. 8
C. 10 D. 12
7. 若 $\alpha \in (0, \frac{2\pi}{3})$, $|\sqrt{3} \cos \alpha| = \sin \frac{\alpha}{2}$, 则 $\tan \alpha =$
- A. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ C. $-2\sqrt{2}$ D. $2\sqrt{2}$
8. 把物体放在冷空气中冷却,如果物体原来的温度是 θ_1 °C,空气的温度是 θ_0 °C,那么 t min 后物体的温度 θ (单位:°C) 可由公式 $\theta = \theta_0 + (\theta_1 - \theta_0)(\frac{1}{2})^k$ 求得,其中 k 是一个随着物体与空气的接触状况而定的正常数.现有 100 °C 的物体,放在 10 °C 的空气中冷却,1 min 后物体的温度是 70 °C,那么该物体的温度降至 20 °C 还需要冷却的时间约为 (参考数据: $\lg 2 \approx 0.3010$, $\lg 3 \approx 0.4771$)
- A. 2.9 min B. 3.4 min C. 3.9 min D. 4.4 min
9. 已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \frac{\pi}{5})$ ($\omega > 0$), 设甲: $\frac{9}{5} \leq \omega \leq \frac{14}{5}$; 乙: 函数 $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上恰有两个零点, 则甲是乙的
- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
10. 已知 $a > b + 1 > 1$, 则下列不等式一定成立的是
- A. $|b - a| > b$ B. $a + \frac{1}{a} > b + \frac{1}{b}$
C. $\frac{b+1}{a-1} < \frac{e^b}{\ln a}$ D. $a + \ln b < b + \ln a$
11. 已知定义在 $\mathbb{R}$ 上的奇函数 $f(x)$ 恒有 $f(x-1) = f(x+1)$, 当 $x \in [0, 1]$ 时, $f(x) = x - \sin(\frac{\pi}{6}x)$, 已知 $k \in (-\frac{1}{5}, -\frac{1}{10})$, 则函数 $g(x) = f(x) - kx - \frac{1}{2}$ 在 $(-1, 6)$ 上的零点个数为
- A. 4 B. 5 C. 3 或 4 D. 4 或 5
12. 在平面四边形 $OACB$ 中, $OA \perp OB$, $OA = 3$, $\angle OBA = \angle ACB = \frac{\pi}{3}$, $\overrightarrow{OC} = \lambda \overrightarrow{OA} + \mu \overrightarrow{OB}$, 则 $\lambda + \mu$ 的最大值为
- A. $\sqrt{3}$ B. 2 C. 3 D. $2\sqrt{3}$

二、填空题:本题共4小题,每小题5分,共20分。

13. 函数 $f(x)=x^3-a\ln x$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线与直线 $2x-y+1=0$ 平行,则实数 $a=$ _____.

14. 若平面向量 a 与 b 的夹角为 60° , $a=(2,0)$, $|b|=1$,则 $|a-2b|=$ _____.

15. 已知正项等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ,若 $\frac{1}{9}, a_1+1, S_9$ 成等比数列,则 $\frac{S_3}{a}$ 的最小值为_____.

16. 设 $a \in (0,1)$,若函数 $f(x)=\log_a x + \log_{a+1} x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,则实数 a 的取值范围是_____.

三、解答题:共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第17~21题为必考题,每个试题考生都必须作答。第22、23题为选考题,考生根据要求作答。

(一)必考题:共60分。

17.(12分)

在 $\triangle ABC$ 中,内角 A 、 B 、 C 所对的边分别为 a 、 b 、 c ,且满足 $b \cos C + \sqrt{3} b \sin C = a + c$.

(1)若 $b=\sqrt{3}$,求 $\triangle ABC$ 的外接圆半径 R ;

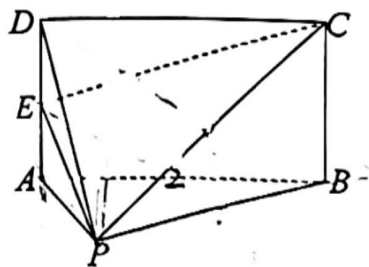
(2)若 $a+c=4\sqrt{3}$,且 $\vec{BA} \cdot \vec{BC}=6$,求 $\triangle ABC$ 的内切圆半径 r .

18.(12分)

如图,四棱锥 $P-ABCD$ 中,四边形 $ABCD$ 是矩形, $AD \perp$ 平面 PAB , $PA \perp PB$, E 是 AD 的中点.

(1)在线段 BP 上找一点 F ,使得直线 $EF \parallel$ 平面 PCD ,并证明你的结论;

(2)若 $PA=AD=\frac{\sqrt{2}}{2}AB=2$,求二面角 $D-PC-E$ 的余弦值.



19.(12分)

各项均为正数的数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ,且满足 $(a_1+a_2+\dots+a_n)^2=a_1^3+a_2^3+\dots+a_n^3$ ($n \in \mathbb{N}^+$).

(1)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2)求数列 $\{a_n \cdot 2^n\}$ 的前 n 项和 T_n .

20.(12分)

与双曲线 $x^2 - y^2 = 1$ 有共同的焦点的椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 经过点 $(1, \frac{\sqrt{6}}{3})$.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 过点 $N(0, -2)$ 的直线 l 交椭圆 C 于 A, B 两点, 交 x 轴于点 P , 点 A 关于 x 轴的对称点为 D , 直线 BD 交 x 轴于点 Q . 求 $|OP| + |OQ|$ 的取值范围.

21.(12分)

已知函数 $f(x) = ae^x - x (a \in \mathbf{R})$.

(1) 当 $a = 1$ 时, 求 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 设 $g(x) = (x^2 - 1)e^x - x - f(x)$, 当 $g(x)$ 有两个极值点 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$ 时, 总有 $\frac{1}{2}g(x_2) \leq 1 - t(e^{-2-x_1} - 1)$ 成立, 证明: $-1 \leq t < \frac{5}{2}$.

(二) 选考题: 共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答. 如果多做, 则按所做的第一题记分.

22. [选修4-4: 坐标系与参数方程](10分)

在平面直角坐标系 xOy 中, 曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = 2\sqrt{3} \cos \alpha \\ y = 2 \sin \alpha \end{cases}$ (其中 α 为参数), 以坐标原点 O 为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系, 直线 l 的极坐标方程为 $\rho \sin(\theta + \frac{\pi}{4}) - 3\sqrt{2} = 0$.

点 P 的极坐标为 $(2\sqrt{2}, \frac{\pi}{4})$.

(1) 求直线 l 的直角坐标方程与曲线 C 的普通方程;

(2) 若 Q 是曲线 C 上的动点, M 为线段 P, Q 的中点, 求点 M 到直线 l 的距离的最大值

23. [选修4-5: 不等式选讲](10分)

已知函数 $f(x) = |x - a| + \frac{1}{2a} (a \neq 0)$.

(1) 若不等式 $f(x) - f(x+m) \leq 1$ 恒成立, 求实数 m 的最大值;

(2) 当 $a < \frac{1}{2}$ 时, 函数 $g(x) = f(x) + |2x - 1|$ 有零点, 求实数 a 的取值范围.