攀枝花市 2024 届高三第一次统考数学（文科）

参考答案

一、选择题：（每小题 5 分，共 60 分）

（1~5）BACCB　（6~10）DACDA　（11~12）CD

二、填空题：（每小题 5 分，共 20 分）

13、$\underline{1}$　　14、$\underline{2}$　　15、$\underline{\dfrac{25}{2}}$　　16、$\underline{(0,\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}]}$

三、解答题：（本大题共 6 小题，共 70 分，解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.）

17、（本小题满分 12 分）

解：（1）因为 $2S_n = na_{n+1}$，所以当 $n \geq 2$ 时，$2S_{n-1} = (n-1)a_n$. ……………………1 分

两式相减得：$(n+1)a_n = na_{n+1}$. ……………………3 分

从而 $\dfrac{a_n}{n} = \dfrac{a_{n+1}}{n+1}$，即数列 $\{\dfrac{a_n}{n}\}$ 是常数列. ……………………5 分

又 $\dfrac{a_1}{1} = 1$，所以 $\dfrac{a_n}{n} = 1 \Rightarrow a_n = n (n \in \mathrm{N}^*)$. ……………………6 分

（2）因为 $a_n \cdot 2^n = n \cdot 2^n$，所以 $T_n = 1\times 2^1 + 2\times 2^2 + 3\times 2^3 + \cdots + n\times 2^n$，

$2T_n = \quad 1\times 2^2 + 2\times 2^3 + \cdots + (n-1)\times 2^n + n\times 2^{n+1}$. ………………8 分

两式相减得：$-T_n = 2^1 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n - n\times 2^{n+1}$

$= \dfrac{2\times(1-2^n)}{1-2} - n\times 2^{n+1}$. ……………………10 分

$= (1-n)2^{n+1} - 2$

即 $T_n = 2 - (1-n)2^{n+1} (n \in \mathbf{N}^*)$. ……………………12 分

18、（本小题满分 12 分）

解　（1）由题意有 $b\cos C + \sqrt{3}b\sin C - a - c = 0$，

由正弦定理得 $\sin B\cos C + \sqrt{3}\sin B\sin C - \sin A - \sin C = 0$. ……………………2 分

$\because A + B + C = \pi$，　$\therefore \sin B\cos C + \sqrt{3}\sin B\sin C - \sin(B+C) - \sin C = 0$，

$\therefore \sqrt{3}\sin B\sin C - \cos B\sin C - \sin C = 0$

$\because C \in (0,\pi)$，　$\therefore \sin C \neq 0$，所以 $\sin(B - \dfrac{\pi}{6}) = \dfrac{1}{2}$. ……………………4 分

$\because B \in (0,\pi)$，$\therefore B - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi}{6}$，故 $B = \dfrac{\pi}{3}$. ……………………5 分

$\therefore$ 外接圆直径 $2R = \dfrac{b}{\sin B} = 2$，故 $R = 1$. ……………………6 分

（2）由题意知 $B = \dfrac{\pi}{3}$，而 $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = ac\cos B = 6$，所以 $ac = 12$. ……………………7 分

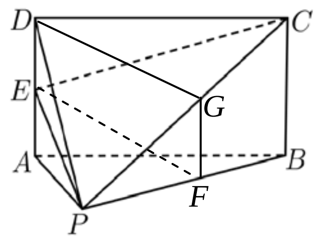
由余弦定理知 $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B = (a+c)^2 - 2ac(1+\cos B) = 12$，所以 $b = 2\sqrt{3}$. ………………9 分

又∵ $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}ac\cdot\sin B=3\sqrt{3}$. ……………………10 分

由△ABC 的面积 $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}(a+b+c)r=3\sqrt{3}$，得 $r=1$. ……………………12 分

19、（本小题满分 12 分）

证明：（1）分别取 PB，PC 的中点 F，G，连接 EF，DG，FG.………………………2 分



∵四边形 $ABCD$， E 是 AD 的中点，

∴ $DE=\dfrac{1}{2}BC$， $DE // BC$， $FG=\dfrac{1}{2}BC$， $FG // BC$，

∴ $DE=FG$， $DE // FG$

∴四边形 $DEFG$ 是平行四边形.……………………4 分

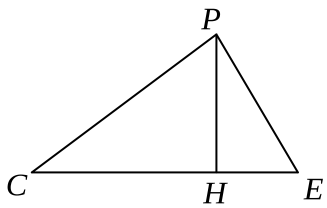
∴ $EF // DG$，又 $EF\not\subset$ 平面 PCD， $DG\subset$ 平面 PCD，

∴ $EF //$ 平面 PCD. ………………………6 分

（2）易知 ΔCDE 、 ΔPDE 为直角三角形，

则 $S_{\Delta CDE}=\dfrac{1}{2}CD\cdot DE=\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times1=\sqrt{2}$， $S_{\Delta PDE}=\dfrac{1}{2}PA\cdot DE=\dfrac{1}{2}\times2\times1=1$. ………………………8 分

又∵ $PD=PC=CD=2\sqrt{2}$　　　∴ $S_{\Delta PCD}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}PD^2=2\sqrt{3}$. ……………………9 分



（法一）∵ $PE=\sqrt{5},PC=2\sqrt{2},CE=3$

过点 P 作 $PH\perp CE$，垂足为 H，设 $HE=x$， $CH=3-x$

则 $PH^2=PC^2-CH^2=PE^2-HE^2$，即 $PH^2=8-(3-x)^2=5-x^2$

解得 $x=1$，从而 $PH=2$

∴ $S_{\Delta PCE}=\dfrac{1}{2}CE\cdot PH=\dfrac{1}{2}\times3\times2=3$. ………………………11 分

（法二）∵ $PE=\sqrt{5},PC=2\sqrt{2},CE=3$　　∴由余弦定理得 $\cos\angle PCE=\dfrac{PC^2+CE^2-PE^2}{2PC\cdot CE}=\dfrac{12}{12\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

从而 $\sin\angle PCE=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$， ∴ $S_{\Delta PCE}=\dfrac{1}{2}PC\cdot CE\cdot\sin\angle PCE=\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times3\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=3$. ………………………11 分

∴ $S_{P-CDE\text{表面积}}=S_{\Delta PDE}+S_{\Delta CDE}+S_{\Delta PCD}+S_{\Delta PCE}=1+\sqrt{2}+2\sqrt{3}+3=4+\sqrt{2}+2\sqrt{3}$. ……………………12 分

20、（本小题满分 12 分）

解：（1）由题知： $c=\sqrt{2}$ 得到 $a^2-b^2=2$. ………………………1 分

又 $e=\sqrt{1-\dfrac{b^2}{a^2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}\Rightarrow\dfrac{b^2}{a^2}=\dfrac{1}{3}$. ………………………2 分

解得 $a^2=3$， $b^2=1$，则椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{3}+y^2=1$. ………………………4 分

（2）由已知直线 l 的斜率存在且不为 0，设直线 $l:y=kx-2$，则 $P(\dfrac{2}{k},0)$.………………………5 分

设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，则 $D(x_1,-y_1)$，直线 BD 的方程： $\dfrac{y+y_1}{y_2+y_1}=\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}$.………………………7 分

令 $y=0$，得点 Q 的横坐标为 $x_Q=\dfrac{x_1y_2+x_2y_1}{y_1+y_2}=\dfrac{2kx_1x_2-2(x_1+x_2)}{k(x_1+x_2)-4}$ ①

由$\begin{cases} y=kx-2 \\ \dfrac{x^2}{3}+y^2=1 \end{cases}$得$(3k^2+1)x^2-12kx+9=0$，则$\Delta>0 \Rightarrow k^2>1$

且$x_1+x_2=\dfrac{12k}{3k^2+1}$，$x_1x_2=\dfrac{9}{3k^2+1}$.……………………9 分

代入①，则$x_Q=\dfrac{18k-2\cdot 12k}{12k^2-4(3k^2+1)}=\dfrac{-6k}{-4}=\dfrac{3k}{2}$.……………………10 分

从而$|OP|+|OQ|=|x_P|+|x_Q|=|\dfrac{2}{k}|+|\dfrac{3k}{2}|\geq 2\sqrt{3}$，当且仅当$|\dfrac{2}{k}|=|\dfrac{3k}{2}|$，即$k=\pm\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$时取到等号.

所以$|OP|+|OQ|$的取值范围为$[2\sqrt{3},+\infty)$. ……………………12 分

21、（本小题满分 12 分）

解：（1）$a=1$时，函数$f(x)=e^x-x$的定义域为$\mathbf{R}$，$f'(x)=e^x-1$. ……………………1 分

由$f'(x)=0$解得$x=0$. ……………………2 分

当$x\in(-\infty,0)$时，$f'(x)<0$，$f(x)$在$x\in(-\infty,0)$单调递减；

当$x\in(0,+\infty)$时，$f'(x)>0$，$f(x)$在$x\in(0,+\infty)$单调递增. ……………………3 分

（2）$g(x)=(x^2-a-1)e^x$，则$g'(x)=(x^2+2x-a-1)e^x$. …………………4 分

根据题意，得方程$x^2+2x-a-1=0$有两个不同的实根$x_1,x_2(x_1<x_2)$，

$\therefore \Delta>0$，即$a>-2$且$x_1+x_2=-2$，所以$x_1<-1<x_2$. …………………5 分

由$tg(x_2)\geq(2+x_1)(e^{x_2}+x_2{}^2-3)$，可得$t(x_2{}^2-a-1)e^{x_2}\geq(2+x_1)(e^{x_2}+x_2{}^2-3)$

又$x_2{}^2-a-1=-2x_2, 2+x_1=-x_2$

$\therefore$总有$-2tx_2e^{x_2}\geq(-x_2)(e^{x_2}+x_2{}^2-3)\Rightarrow x_2[2te^{x_2}-(e^{x_2}+x_2{}^2-3)]\leq 0$对$x_2>-1$恒成立. …………………6 分

①当$x_2=0$时，$x_2[2te^{x_2}-(e^{x_2}+x_2{}^2-3)]\leq 0$恒成立，此时$t\in\mathbf{R}$；………………7 分

②当$x_2\in(-1,0)$时，$2te^{x_2}-(e^{x_2}+x_2{}^2-3)\geq 0$成立，即$2t\geq\dfrac{e^{x_2}+x_2{}^2-3}{e^{x_2}}$

令函数$h(x_2)=\dfrac{e^{x_2}+x_2{}^2-3}{e^{x_2}}$，则$h'(x_2)=\dfrac{-x_2{}^2+2x_2+3}{e^{x_2}}=-\dfrac{(x_2+1)(x_2-3)}{e^{x_2}}>0$在$x_2\in(-1,0)$恒成立

故$h(x_2)$在$x_2\in(-1,0)$单调递增，所以$2t\geq h(0)=-2\Rightarrow t\geq -1$. ………………9 分

③当$x_2\in(0,+\infty)$时，$2te^{x_2}-(e^{x_2}+x_2{}^2-3)\leq 0$成立，即$2t\leq\dfrac{e^{x_2}+x_2{}^2-3}{e^{x_2}}$

由函数$h(x_2)=\dfrac{e^{x_2}+x_2{}^2-3}{e^{x_2}}$，则$h'(x_2)=-\dfrac{(x_2+1)(x_2-3)}{e^{x_2}}=0$，解得$x_2=3$

当$x_2\in(0,3)$时，$h'(x_2)>0$，$h(x_2)$单调递增；当$x_2\in(3,+\infty)$时，$h'(x_2)<0$，$h(x_2)$单调递减

又$h(x_2)=1+\dfrac{x_2{}^2-3}{e^{x_2}}$，当$x_2\to+\infty$时，$h(x_2)\to 1$

$\therefore$所以$2t\leq h(0)=-2\Rightarrow t\leq -1$. …………………11 分

综上所述，$t=-1$. ……………………12 分

请考生在 22~23 两题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题记分．作答时用 2B 铅笔在答题卡上把所选题目对应题号右侧的方框涂黑．

22.（本小题满分 10 分）选修 4-4：坐标系与参数方程

解：（1）∵直线 l 的极坐标方程为 $\rho\sin(\theta+\frac{\pi}{4})-3\sqrt{2}=0$，即 $\rho\sin\theta+\rho\cos\theta-6=0$. ……………2 分

由 $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$，可得直线 l 的直角坐标方程为 $x+y-6=0$. …………………3 分

将曲线 C 的参数方程 $\begin{cases} x=2\sqrt{3}\cos\alpha \\ y=2\sin\alpha \end{cases}$，消去参数 α，得曲线 C 的普通方程为 $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{4}=1$. …………………5 分

（2）设 $Q(2\sqrt{3}\cos\alpha, 2\sin\alpha)$，点 P 的极坐标 $(2\sqrt{2},\frac{\pi}{4})$ 化成直角坐标为 $(2,2)$. …………………6 分

则 $M(\sqrt{3}\cos\alpha+1, \sin\alpha+1)$. …………………7 分

∴点 M 到直线 l 的距离 $d=\frac{|\sqrt{3}\cos\alpha+\sin\alpha-4|}{\sqrt{2}}=\frac{\left|2\sin(\alpha+\frac{\pi}{3})-4\right|}{\sqrt{2}}\le 3\sqrt{2}$. …………………9 分

当 $\sin(\alpha+\frac{\pi}{3})=-1$，即 $\alpha=2k\pi+\frac{7\pi}{6}(k\in\mathbf{Z})$ 时，等号成立.

∴点 M 到直线 l 的距离的最大值为 $3\sqrt{2}$. …………………10 分

23.（本小题满分 10 分）选修 4-5：不等式选讲

解（1）∵ $f(x)=|x-a|+\frac{1}{2a}$，∴ $f(x+m)=|x+m-a|+\frac{1}{2a}$. …………………1 分

∴ $f(x)-f(x+m)=|x-a|-|x+m-a|\le|m|$. …………………3 分

∴ $|m|\le 1$，∴ $-1\le m\le 1$，∴实数 m 的最大值为 1. …………………5 分

（2）当 $a<\frac{1}{2}$ 时，$g(x)=f(x)+|2x-1|=|x-a|+|2x-1|+\frac{1}{2a}=\begin{cases} -3x+a+\frac{1}{2a}+1, x<a, \\ -x-a+\frac{1}{2a}+1, a\le x\le\frac{1}{2}, \\ 3x-a+\frac{1}{2a}-1, x>\frac{1}{2}, \end{cases}$

∴ $g(x)_{\min}=g(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}-a+\frac{1}{2a}=\frac{-2a^2+a+1}{2a}\le 0$. …………………8 分

∴ $\begin{cases} 0<a<\frac{1}{2}, \\ -2a^2+a+1\le 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a<0, \\ -2a^2+a+1\ge 0 \end{cases}$ ∴ $-\frac{1}{2}\le a<0$，∴实数 a 的取值范围是 $[-\frac{1}{2},0)$. ……………10 分