2023—2024 学年度上期高 2024届半期考试

数学试卷（理科）

考试时间：120 分钟　满分：150 分

注意事项：

1. 答题前,务必将自己的姓名、考籍号填写在答题卡规定的位置上.
2. 本试卷分选择题和非选择题两部分.
3. 答选择题时,必须使用 2B 铅笔将答题卡上对应题目的答案标号涂黑,如需改动,用橡皮擦擦干净后,再选涂其它答案标号.
4. 答非选择题时,必须使用 0.5 毫米黑色签字笔,将答案书写在答题卡规定位置上.
5. 所有题目必须在答题卡上作答,在试题卷上答题无效.
6. 考试结束后,只将答题卡交回.

第 I 卷(选择题,共 60 分)

一、选择题:（本题共 12 小题,每小题 5 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.）

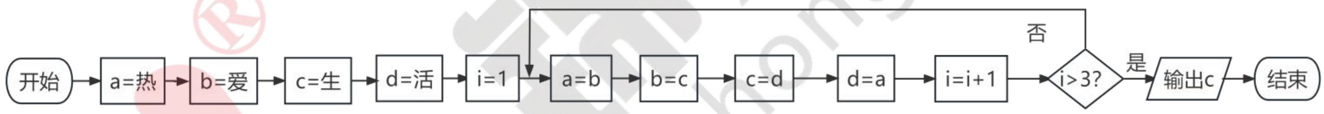
1.已知集合 $A=\{x\mid x^2-2x<0\}$，$B=\{x\mid 2^x>1\}$，则(　　)

A．$B\subseteq A$　　B．$A\subseteq B$　　C．$A\cup B=R$　　D．$A\cap B=\varnothing$

2. 复数 $z=\dfrac{3+4i}{2+i}$，则 $|z|=$　　(　　)

A．$\sqrt{2}$　　B．5　　C．3　　D．$\sqrt{5}$

3.执行如图所示程序框图，则输出结果是(　　)



A．热　　B．爱　　C．生　　D．活

4.某公司一种型号的产品近期销售情况如表：

月份 x	2	3	4	5	6
销售额 y（万元）	15.1	16.3	17.0	17.2	18.4

根据上表可得到回归直线方程 $\hat{y}=0.75x+\hat{a}$，据此估计，该公司 7 月份这种型号产品的销售额为(　　)

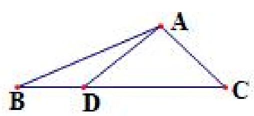
A. 18.85 万元　　B. 19.3 万元　　C. 19.25 万元　　D. 19.05 万元

5．已知空间两不同直线 m、n，两不同平面 α、β，下列命题正确的是（　　）

A．若 $m//\alpha$ 且 $n//\alpha$，则 $m//n$　　B．若 $m\perp\beta$ 且 $m\perp n$，则 $n//\beta$

C．若 $m\perp\alpha$ 且 $m//\beta$，则 $\alpha\perp\beta$　　D．若 m 不垂直于 α，且 $n\subset\alpha$，则 m 不垂直于 n

6. 如图，在 ΔABC 中，$\angle BAC=120^0, AB=2, AC=1$，$D$ 是 BC 边一点，$DC=2BD$，则 $\overline{AD}\cdot\overline{BC}$ 等于(　　)



A．$-\dfrac{8}{3}$　　B．$\dfrac{8}{3}$　　C．$\dfrac{2}{3}$　　D．$-\dfrac{2}{3}$

7. 将函数 $f(x)=\cos 2x$ 的图象向左平移 $\dfrac{\pi}{2}$ 个单位得到函数 $g(x)$ 的图象，则关于函数 $y=g(x)$ 以下说法正确的是(　　)

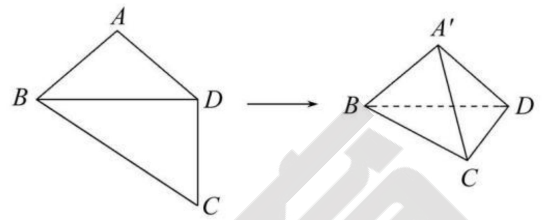
A．最大值为 1, 图象关于直线 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 对称　　B. 周期为 π，图象关于点 $(\dfrac{3\pi}{8}，0)$ 对称

C. 在 $(-\dfrac{3\pi}{8},\dfrac{\pi}{8})$ 上单调递增，为偶函数　　D. 在 $(0，\dfrac{\pi}{4})$ 上单调递减，为奇函数

8. 如图，平面四边形 $ABCD$ 中，$AB=AD=CD=1, BD=\sqrt{2}, BD\perp CD$，将其沿对角线 BD 折成四面体 $A'-BCD$，使平面 $A'BD\perp$ 平面 BCD，四面体 $A'-BCD$ 的顶点在同一个球面上，则该球的体积为（　　）

$A.4\sqrt{3}\pi$　　$B.\dfrac{\sqrt{3}}{2}\pi$

$C.\dfrac{4}{3}\pi$　　$D.\dfrac{\sqrt{2}}{3}\pi$



9. 已知双曲线 C 的两个顶点分别为 A_1，A_2，若 C 的渐近线上存在点 P，使 $|PA_1|=\sqrt{2}|PA_2|$，则 C 的离心率范围是（　　）

$A.(1,3]$　　$B.[3,+\infty)$　　$C.(1,2]$　　$D.[2,+\infty)$

10. 已知函数 $f(x)=kx\ln x-\dfrac{x^2}{2}-kx\ (k\in R)$, 在 $(0,e^2)$ 有且只有一个极值点，则 k 的取值范围是　（　　）

$A.[0,e)$　　$B.(-\infty,0)\cup[\dfrac{e^2}{2},+\infty)\cup\{e\}$　　$C.(-\infty,0)\cup[\dfrac{e^2}{2},+\infty)$　　$D.(0,e]$

11. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=-\dfrac{1}{2}, a_2=1, a_n-5a_{n-1}+4a_{n-2}=0(n\geq 3)$, 则 $a_{1013}=$（　　）

$A.2^{2023}-1$　　$B.2^{2024}-1$　　$C.2^{2026}-1$　　$D.2^{1013}-1$

12. 已知 $a>0, b>0$，则在下列关系

① $a^2+b^2\leq 2$　② $b\leq e^{1-a}$　③ $cos\dfrac{a}{2}\geq\dfrac{1}{3-b}$　④ $e^a-ea=e^b-eb$ 中，

能作为“$a+b\leq 2$”的必要不充分条件的个数是（　　）.

A．1 个　　B.2 个　　C.3 个　　D.4 个

第Ⅱ卷(非选择题,共 90 分)

二、填空题:（本大题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.）

13. 曲线 $y=x^2-2x-\ln x+2$ 在点 $(1,1)$ 处的切线的倾斜角为__________.

14. 已知 $n=\int_0^4 xdx$，则二项式 $(x^3+\dfrac{1}{x})^n\ (x>0)$ 展开式中的常数项为__________.

15. 数列 $\{a_n\}$ 满足：$a_1=a_2=1, a_{2n+1}-a_{2n-1}=2, \dfrac{a_{2n+2}}{a_{2n}}=2$，数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和记为 S_n，则 $S_{23}=$________.

16. F_1、F_2 分别是椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点，点 P 在椭圆上，$\triangle PF_1F_2$ 的内切圆的圆心为 I，设直线 IF_1, IF_2 的斜率分别为 $\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{3}$，则椭圆的离心率为______.

三、**解答题:**（本题共 6 小题,共 70 分.解答应写出文字说明,证明过程或演算步骤．）

17．（本小题满分 12 分）

在 ΔABC 中，内角 A、B、C 所对的边分别为 a、b、c，其外接圆半径为 1，$\dfrac{b}{1-\cos B}=4, \sin A+\sin C=1$.

（1）求 $\cos B$；

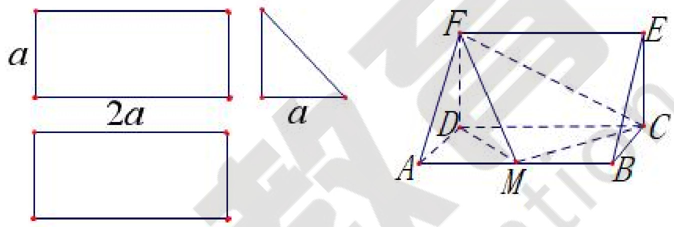
（2）求 ΔABC 的面积.

18．（本小题满分 12 分）

一个多面体的三视图和直观图如图所示，其中正视图和俯视图均为矩形，侧视图为直角三角形，M 是 AB 的中点.

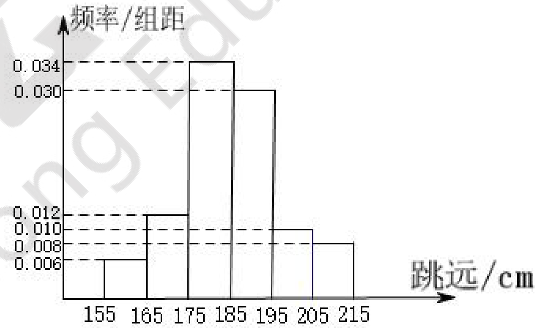
（1）求证：$CM\perp$ 平面 FDM；

（2）若 N 为线段 FC 上一点，且 $\overrightarrow{FN}=\lambda\overrightarrow{FC}$，二面角 $F-DM-N$ 的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，求 λ 的值.



19．（本小题满分 12 分）

体育强国是新时期我国体育工作改革和发展的目标和任务，我国要力争实现体育大国向体育强国的转变。2019 年 9 月 2 日，国务院办公厅印发《体育强国建设纲要》，纲要提出，到 2035 年，《国民体质测定标准》合格率超过 92%.2023 年 9 月 23 日至 10 月 8 日,第 19 届亚运会在我国杭州成功举办，中国代表队以 201 枚金牌，383 枚奖牌夺得金牌榜和奖牌榜第一。这是新时期中国体育工作改革和发展过程中取得的优异成绩。某校将学生的立定跳远作为体育健康监测项目，若该校初三年级上期开始时要掌握全年级学生立定跳远情况，随机抽取了 100 名学生进行测试，得到右边频率分布直方图，且规定计分规则如下表：



跳远距离（cm）	[155，165)	[165，175)	[175，185)	[185，+∞)
得分	17	18	19	20

（Ⅰ）现从样本的 100 名学生中，任意选取 2 人，求两人得分之和不大于 35 分的概率；

（Ⅱ）若该校初三年级所有学生的跳远距离 X（单位：cm）服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，用样本数据的平均值和方差估计总体的期望和方差，已知样本方差 $S^2=153$（各组数据用中点值代替）．根据往年经验，该校初三年级学生经过一年训练后，每人跳远距离都有明显进步，假设初三结束进行跳远测试时每人跳远比初三上学期开始时距离增加 10cm，现利用所得正态分布模型：

（ⅰ）若全年级恰好有 2000 名学生，预估初三结束进行测试时，跳远距离在 182.63cm 以上的人数；（结果四舍五入到整数）

（ⅱ）若在全年级所有学生中任意选取 3 人，记初三结束进行测试时，跳远距离在 195cm 以上的人数为 ξ，求随机变量 ξ 的分布列和期望.

附：若随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，则 $P(\mu-\sigma<X<\mu+\sigma)=0.6826$，

$P(\mu-2\sigma<X<\mu+2\sigma)=0.9544$，$P(\mu-3\sigma<X<\mu+3\sigma)=0.9974$.

参考数据：$12.37^2\approx 153$；$2.37^2\approx 5.62$

20.（本小题满分 12 分）

已知抛物线Γ：$y^2=4x$的焦点为F，过抛物线上除原点外任一点P作抛物线准线的垂线，垂足为M，直线l是$\angle MPF$的角平分线.

（1）求直线l与抛物线Γ交点的个数；

（2）直线l与抛物线的准线相交于点N，过N作抛物线的切线，切点为Q（不与P点重合），求△NPQ面积的最小值.

21.（本小题满分 12 分）

已知函数$f\left(x\right)=x^2-2x-a\ln x$，$g\left(x\right)=ax$.

（1）求函数$F(x)=f(x)+g(x)$ 的极值；

（2）若不等式$\dfrac{\sin x}{2+\cos x}\le g(x)$ 对$x\ge 0$ 恒成立，求a的取值范围.

请考生在第 22，23 题中任选择一题作答，如果多做，则按所做的第一题计分. 作答时，用 2B 铅笔在答题卡上把所选题目所对应的标号涂黑.

22．[选修 4－4：坐标系与参数方程]（本小题满分 10 分）

已知曲线$C_1:\begin{cases}x=1+2t\\ y=2+t\end{cases}$（$t$为参数），以直角坐标系的原点$O$为极点，$x$轴的正半轴为极轴建立极坐标系，曲线$C_2$的极坐标方程为$\rho=6\sin\theta$.

（1）求曲线C_1的普通方程和C_2的直角坐标方程；

（2）若曲线C_1与C_2交于两点A,B，点P是曲线C_2上异于点A,B的任意一点，求△PAB的面积S的最大值.

23. [选修 4－5：坐标系与参数方程]（本小题满分 10 分）

已知函数$f(x)=|x-1|$.

(1) 解不等式：$f(x)+f(x+4)\ge 8$；

(2) 若$|a|<1,|b|<1$, 且$a\ne 0$，求证：$f(ab)>|a|f(\dfrac{b}{a})$.