

2023 年普通高等学校招生全国统一考试（天津卷）

数 学

一、选择题（在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

(1) 已知集合 $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A = \{1, 3\}$, $B = \{1, 2, 4\}$, 则 $\complement_U B \cup A =$

- (A) $\{1, 3, 5\}$ (B) $\{1, 3\}$ (C) $\{1, 2, 4\}$ (D) $\{1, 2, 4, 5\}$

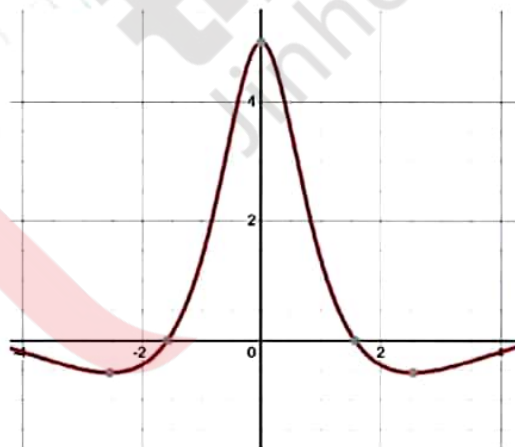
(2) “ $a^2 = b^2$ ” 是 “ $a^2 + b^2 = 2ab$ ” 的

- (A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件
(C) 充分必要条件 (D) 既不充分又不必要条件

(3) 若 $a = 1.01^{0.5}$, $b = 1.01^{0.6}$, $c = 0.6^{0.5}$, 则 a, b, c 的大小关系为

- (A) $c > a > b$ (B) $c > b > a$
(C) $a > b > c$ (D) $b > a > c$

(4) 函数 $f(x)$ 的图象如下图所示, 则 $f(x)$ 的解析式可能为



- (A) $\frac{5(e^x - e^{-x})}{x^2 + 2}$ (B) $\frac{5 \sin x}{x^2 + 1}$
(C) $\frac{5(e^x + e^{-x})}{x^2 + 2}$ (D) $\frac{5 \cos x}{x^2 + 1}$

(5) 已知函数 $f(x)$ 的一条对称轴为直线 $x = 2$, 一个周期为 4, 则 $f(x)$ 的解析式可能为

- (A) $\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ (B) $\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$
 (C) $\sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)$ (D) $\cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)$

(6) 已知 $\{a_n\}$ 为等差数列, S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, $a_{n+1} = 2S_n + 2$, 则 a_4 的值为

- (A) 3 (B) 18
 (C) 54 (D) 152

(7) 忘了。图是个花和一个线性回归的图。正相关。相关系数 0.8245, 参数好像是茎长和生长年数? 下列说法正确的是

- (A) 茎长和生长年数没有相关性。
 (B) 茎长和生长年数负相关。
 (C) 忘了。
 (D) 若从样本中抽取一部分, 则这部分的相关系数一定是 0.8245。

(8) 在三棱锥 $P-ABC$ 中, 线段 PC 上的点 M 满足 $PM = \frac{1}{3}PC$, 线段 PB 上的点 N 满足 $PN = \frac{2}{3}PB$, 则三棱锥 $P-AMN$ 和三棱锥 $P-ABC$ 的体积之比为

- (A) $\frac{1}{9}$ (B) $\frac{2}{9}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) $\frac{4}{9}$

(9) 双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 . 过 F_2 作其中一条渐近线的垂线, 垂足为 P . 已知 $PF_2 = 2$ 、直线 PF_1 的斜率为 $\frac{\sqrt{2}}{4}$, 则双曲线的方程为

- (A) $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{4} = 1$ (B) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{8} = 1$
 (C) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{2} = 1$ (D) $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{4} = 1$

2023 年普通高等学校招生全国统一考试（天津卷）

数 学

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分. 试题中包含两个空的，答对 1 个的给 3 分，全部答对的给 5 分.

(10) 已知 i 是虚数单位，化简 $\frac{5+14i}{2+3i}$ 的结果为_____.

(11) 在 $\left(2x^3 - \frac{1}{x}\right)^6$ 的展开式中， x^2 项的系数为_____.

(12) 过原点的一条直线与圆 $C: (x+2)^2 + y^2 = 3$ 相切，交曲线 $y^2 = 2px$ ($p > 0$) 于点 P ，若 $OP = 8$ ，则 p 的值为_____.

(13) 甲乙丙三个盒子中装有一定数量的黑球和白球，其总数之比为 $5:4:6$. 这三个盒子中黑球占总数的比例分别为 40% ， 25% ， 50% . 现从三个盒子中各取一个球，取到的三个球都是黑球的概率为_____；将三个盒子混合后任取一个球，是白球的概率为_____.

(14) 在 $\triangle ABC$ 中， $\angle A = 60^\circ$ ，点 D 为 AB 的中点，点 E 为 CD 的中点，若设 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$ ，则 $\overrightarrow{AE}$ 可用 $\vec{a}, \vec{b}$ 表示为_____；若 $\overrightarrow{BF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ ，则 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AF}$ 的最大值为_____.

(15) 若函数 $f(x) = ax^2 - 2x - |x^2 - ax + 1|$ 有且仅有两个零点，则 a 的取值范围为_____.

三、解答题：本大题共 5 小题，共 75 分，解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

(16) 在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 所对的边分别是 a, b, c . 已知 $a = \sqrt{39}$, $b = 2$, $\angle A = 120^\circ$.

(I) 求 $\sin B$ 的值;

(II) 求 c 的值;

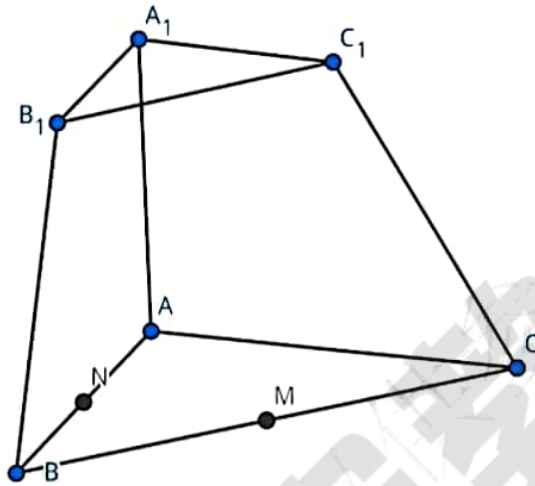
(III) 求 $\sin(B - C)$.

(17) 如图，已知 $A_1A \perp$ 平面 ABC ， $AB \perp AC$ ， $AB = AC = AA_1 = 2$ ， $A_1C_1 = 1$ 。

(I) 求证： $A_1N \parallel$ 平面 C_1MA ；

(II) 求平面 C_1MA 与平面 ACC_1A_1 所成角的余弦值；

(III) 求点 C 到平面 C_1MA 的距离。



(18) 设椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的左右顶点分别为 A_1, A_2 , 右焦点为 F , 已知 $|A_1F| = 3, |A_2F| = 1$.

(I) 求椭圆方程及其离心率;

(II) 已知点 P 是椭圆上一动点 (不与端点重合), 直线 A_2P 交 y 轴于点 Q , 若三角形 A_1PQ 的面积是三角形 A_2FP 面积的二倍, 求直线 A_2P 的方程.

(19) 已知 $\{a_n\}$ 是等差数列, $a_2 + a_5 = 16$, $a_5 - a_3 = 4$.

(I) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式和 $\sum_{i=2^{n-1}}^{2^n-1} a_i$.

(II) 已知 $\{b_n\}$ 为等比数列, 对于任意 $k \in \mathbb{N}^*$, 若 $2^{k-1} \leq n \leq 2^k - 1$, 则 $b_k < a_n < b_{k+1}$

i. 当 $k \geq 2$ 时, 求证: $2^k - 1 < b_n < 2^k + 1$

ii. 求 $\{b_n\}$ 的通项公式及其前 n 项和.

(20) 已知函数 $f(x) = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\right) \ln(x+1)$.

(I) 求曲线 $y = f(x)$ 在 $x = 2$ 处切线的斜率;

(II) 当 $x > 0$ 时, 证明: $f(x) > 1$;

(III) 证明: $\frac{5}{6} < \ln(n!) - \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln(n) + n \leq 1$.