

姓名：_____ 座位号_____

(在此试卷上答题无效)

绝密★启用前

2023 年普通高等学校招生全国统一考试

数学 (理科)

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 设集合 $A = \{x | x = 3k + 1, k \in \mathbb{Z}\}$ ， $B = \{x | x = 3k + 2, k \in \mathbb{Z}\}$ ， U 为整数集，则

$$C_U(A \cap B) =$$

A. $\{x | x = 3k, k \in \mathbb{Z}\}$

B. $\{x | x = 3k - 1, k \in \mathbb{Z}\}$

C. $\{x | x = 3k - 1, k \in \mathbb{Z}\}$

D. $\emptyset$

2. 若复数 $(a + i)(1 - ai) = 2$ ，则 $a =$

A. -1

B. 0

C. 1

D. 2

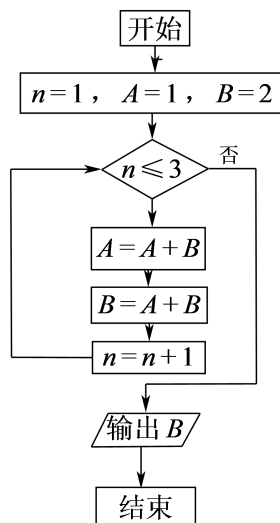
3. 执行下面的程序框图，输出的 $B =$

A. 21

B. 34

C. 55

D. 89



4. 向量 $|a|=|b|=1$, $|c|=\sqrt{2}$ 且 $a+b+c=0$, 则 $\cos\langle a-b, b-c \rangle=$
- A. $-\frac{1}{5}$ B. $-\frac{2}{5}$ C. $\frac{2}{5}$ D. $\frac{4}{5}$
5. 已知数列 $\{a_n\}$ 中, S_n 为 $\{a_n\}$ 前 n 项和, $S_5=5S_3-4$, 则 $S_4=$
- A. 7 B. 9 C. 15 D. 20
6. 有 50 人报名足球俱乐部, 60 人报名乒乓球俱乐部, 结束 70 人报名足球或乒乓球俱乐部, 若已知某人报足球俱乐部, 则其报乒乓球, 俱乐部的概率为
- A. 0.8 B. 0.4 C. 0.2 D. 0.1
7. “ $\sin^2\alpha + \sin^2\beta = 1$ ” 是 “ $\cos\alpha + \cos\beta = 0$ ” 的
- A. 充分条件但不是必要条件 B. 必要条件但不是充分条件
- C. 充要条件 D. 既不是充分条件也不是必要条件
8. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a>0, b>0)$ 的离心率为 $\sqrt{5}$, 其中一条渐近线与圆 $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 1$ 交于 A, B 两点, 则 $|AB|=$
- A. $\frac{1}{5}$ B. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ C. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ D. $\frac{4\sqrt{5}}{5}$
9. 有五名志愿者参加社区服务, 共服务星期六、星期天两天, 每天从中任选两人参加服务, 则两天中恰有 1 人连续参加两天服务的选择种数为
- A. 120 B. 60 C. 40 D. 30
10. 已知 $f(x)$ 为函数 $y = \cos(2x + \frac{\pi}{4})$ 向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位所得函数, 则 $y = f(x)$ 与 $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$, 交点个数为
- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4
11. 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为正方形, $AB=4$, $PC=PD=3$, $\angle PCA=45^\circ$, 则 $\triangle PBC$ 的面积为
- A. $2\sqrt{2}$ B. $3\sqrt{2}$ C. $4\sqrt{2}$ D. $5\sqrt{2}$
12. 已知椭圆 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{6} = 1$, F_1, F_2 为两个焦点, O 为原点, P 为椭圆上一点, $\cos\angle F_1PF_2 = \frac{3}{5}$, 则 $|OP|=$
- A. $\frac{2}{5}$ B. $\frac{\sqrt{30}}{2}$ C. $\frac{3}{5}$ D. $\frac{\sqrt{35}}{2}$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 若 $y = (x-1)^2 + ax + \sin(x + \frac{\pi}{2})$ 为偶函数, 则 $a =$ _____.

14. 设 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} -2x + 3y \leq 3 \\ 3x - 2y \leq 3 \\ x + y = 1 \end{cases}$ ，设 $z = 3x + 2y$ ，则 z 的最大值为_____.

15. 在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中， E, F 分别为 CD, A_1B_1 的中点，则以 EF 为直径的球面与正方体每条棱的交点总数为_____.

16. 已知 $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC = 60^\circ$ ， $AB = 2$ ， $BC = \sqrt{6}$ ， AD 平分 $\angle BAD$ 交 BC 于点 D ，则 $AD =$ _____.

四、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据情况作答。

(一) 必答题 (60 分)

17. (12 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 中， $a_2 = 1$ ，设 S_n 为 $\{a_n\}$ 前 n 项和， $2S_n = na_n$ 。

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

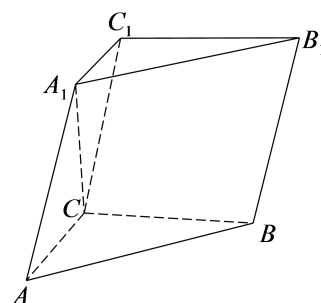
(2) 求数列 $\{\frac{a_n + 1}{2^n}\}$ 的前 n 项和 T_n 。

18. (12 分)

在三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中， $AA_1 = 2$ ， $A_1C \perp$ 底面 ABC ， $\angle ACB = 90^\circ$ ， A_1 到平面 BCC_1B_1 的距离为 1。

(1) 证明： $AC = A_1C$ ；

(3) 若直线 AA_1 与 BB_1 距离为 2，求 AB_1 与平面 BCC_1B_1 所成角的正弦值。



19. (12 分)

为探究某药物对小鼠的生长作用，将 40 只小鼠均分为两组，分别为对照组（不药物）和实验组（加药物）。

(1) 设其中两只小鼠中对照组小鼠数目为 X ，求 X 的分布列和数学期望；

(2) 测得 40 只小鼠体重如下（单位：g）：（已按从小到大排好）

对照组：17.3 18.4 20.1 20.4 21.5 23.2 24.6 24.8 25.0 25.4

26.1 26.3 26.4 26.5 26.8 27.0 27.4 27.5 27.6 28.3

实验组：5.4 6.6 6.8 6.9 7.8 8.2 9.4 10.0 10.4 11.2

14.4 17.3 19.2 20.2 23.6 23.8 24.5 25.1 25.2 26.0

(i) 求 40 只小鼠体重的中位数 m ，并完成下面 2×2 列联表：

(ii) 根据 2×2 列联表，能否有 95% 的把握认为药物对小鼠生长有抑制作用。

	$<m$	$>m$
对照组		
实验组		

参考数据： $\frac{k_0}{p(k^2 \geq k_0)}$ | 0.10 | 0.05 | 0.010
2.706 | 3.841 | 6.635

20. (12 分)

直线 $x - 2y + 1 = 0$ 与 $y^2 = 2px (p > 0)$ 交于 A, B 两点， $|AB| = 4\sqrt{15}$ 。

(1) 求 P 的值；

(2) F 为 $y^2 = 2px$ 的焦点， M, N 为抛物线上的两点，且 $\overrightarrow{MF} \cdot \overrightarrow{NF} = 0$ ，求 $\triangle MNF$ 面积的最小值。

21. (12 分)

已知 $f(x) = ax - \frac{\sin x}{\cos^3 x}$ ， $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 。

(1) 当 $a = 8$ 时，讨论 $f(x)$ 的单调性；

(2) 若 $f(x) < \sin 2x$ ，求 a 的取值范围。

(二) 选考题：共 10 分。请考生第 22、23 题中选一道作答。如果多做，则按所做的第一题计分。

22. [选修 4—4：坐标系与参数方程] (10 分)

已知 $p(2, 1)$ ，直线 $l: \begin{cases} x = 2 + t \cos \alpha, \\ y = 1 + t \sin \alpha, \end{cases}$ (t 为参数)， l 与 x 轴， y 轴正半轴交于 A, B 两点，

$$|PA| \cdot |PB| = 4.$$

(1) 求 a 的值；

(2) 以原点为极点， x 轴正半轴为极轴建立极坐标系，求 l 的极坐标方程。

23. [选修 4—5：不等式选讲] (10 分)

已知 $f(x) = 2|x - a| - a$ ， $a > 0$ 。

(1) 解不等式 $f(x) < x$ ；

(2) 若 $y = f(x)$ 与坐标轴围成的面积为 2，求 a 。