绝密★启用前　　试卷类型：A

2023年普通高等学校招生全国统一考试

数　学

本试卷共4页，22小题，满分150分。考试用时120分钟。

注意事项： 1．答题前，请务必将自己的姓名、准考证号用黑色字迹的签字笔或钢笔分别填写在试题卷和答题卡上。用2B铅笔将试卷类型（A）填涂在答题卡相应位置上。将条形码横贴在答题卡右上角“条形码粘贴处”。

2．作答选择题时，选出每小题答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目选项的答案信息点涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案，答案不能答在试卷上。

3．非选择题必须用黑色字迹钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新的答案；不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答的答案无效。

4．考生必须保持答题卡的整洁。考试结束后，将试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本大题共8小题，每小题5分，共计40分．每小题给出的四个选项中，只有一个选项是正确的．请把正确的选项填涂在答题卡相应的位置上．

1．在复平面内，$(1+3\mathrm{i})(3-\mathrm{i})$对应的点位于

A．第一象限　　B．第二象限　　C．第三象限　　D．第四象限

2．设集合$A=\{0,-a\}$，$B=\{1,a-2,2a-2\}$，若$A\subseteq B$，则$a=$

A．2　　B．1　　C．$\frac{2}{3}$　　D．1

3．某学校为了了解学生参加体育运动的情况，用比例分配的分层随机抽样法作抽样调查，拟从初中部和高中部两层共抽取60名学生，已知该该校初中部和高中部分别有400和200名学生，则不同的抽样结果有

A．$C_{200}^{45}C_{200}^{15}$种　　B．$C_{200}^{20}C_{200}^{40}$种　　C．$C_{200}^{30}C_{200}^{30}$种　　D．$C_{200}^{40}C_{200}^{20}$种

4．若$f(x)=(x+a)\ln\frac{2x-1}{2x+1}$为偶函数，则$a=$

A．-1　　B．0　　C．$\frac{1}{2}$　　D．1

5．已知椭圆$C:\frac{x^2}{3}+y^2=1$的左焦点和右焦点分别为F_1和F_2，直线$y=x+m$与C交于A，B两点，若△F_1AB的面积是△F_2AB的两倍，则$m=$

A．$\frac{2}{3}$　　B．$\frac{\sqrt{2}}{3}$　　C．$-\frac{\sqrt{2}}{3}$　　D．$-\frac{2}{3}$

6．已知函数 $f(x)=ae^{x}-\ln x$ 在区间 $(1,2)$ 上单调递增，则 a 的最小值为

A．e^{2}　　B．e　　C．e^{-1}　　D．e^{-2}

7．已知 α 为锐角，$\cos\alpha=\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$，则 $\sin\dfrac{\alpha}{2}=$

A．$\dfrac{3-\sqrt{5}}{8}$　　B．$\dfrac{-1+\sqrt{5}}{8}$　　C．$\dfrac{3-\sqrt{5}}{4}$　　D．$\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$

8．记 S_n 为等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，若 $S_4=-5$，$S_6=21S_2$，则 $S_8=$

A．120　　B．85　　C．-85　　D．-120

二、选择题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共计 20 分．每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求。全部选对得 5 分，选对但不全得 2 分，有选错的得 0 分。

9．已知圆锥的顶点为 P，底面圆心为 O，AB 为底面直径，$\angle APB=120°$，$PA=2$，点 C 在底面圆周上，且二面角 $P-AC-O$ 为 $45°$，则

A．该圆锥的体积为 π

B．该圆锥的侧面积为 $4\sqrt{3}\pi$

C．$AC=2\sqrt{2}$

D．$\triangle PAC$ 的面积为 $\sqrt{3}$

10．设 O 为坐标原点，直线 $y=-\sqrt{3}(x-1)$ 过抛物线 $C:y^{2}=2px(p>0)$ 的焦点，且与 C 交于 M，N 两点，l 为 C 的准线，则

A．$p=2$

B．$|MN|=\dfrac{8}{3}$

C．以 MN 为直径的圆与 l 相切

D．$\triangle OMN$ 为等腰三角形

11．若函数 $f(x)=a\ln x+\dfrac{b}{x}+\dfrac{c}{x^{2}}(a\neq0)$ 既有极大值也有极小值，则

A．$bc>0$　　B．$ab>0$　　C．$b^{2}+8ac>0$　　D．$ac<0$

12. 在信道内传输 0，1 信号，信号的传输相互独立. 发送 0 时，收到 1 的概率为 $\alpha(0<\alpha<1)$，收到 0 的概率为 $1-\alpha$；发送 1 时，收到 0 的概率为 $\beta(0<\beta<1)$，收到 1 的概率为 $1-\beta$. 考虑两种传输方案：单次传输和三次传输. 单次传输是指每个信号只发送 1 次，三次传输是指每个信号重复发送 3 次. 收到的信号需要译码，译码规则如下：单次传输时，收到的信号即为译码；三次传输时，收到的信号中出现次数多的即为译码（例如，若依次收到 1，0，1，则译码为 1）.

A. 采用单次传输方案，若依次发送 1，0，1，则依次收到 1，0，1 的概率为 $(1-\alpha)(1-\beta)^2$

B. 采用三次传输方案，若发送 1，则依次收到 1，0，1 的概率为 $\beta(1-\beta)^2$

C. 采用三次传输方案，若发送 1，则译码为 1 的概率为 $\beta(1-\beta)^2+(1-\beta)^3$

D. 当 $0<\alpha<0.5$ 时，若发送 0，则采用三次传输方案译码为 0 的概率大于采用单次传输方案译码为 0 的概率

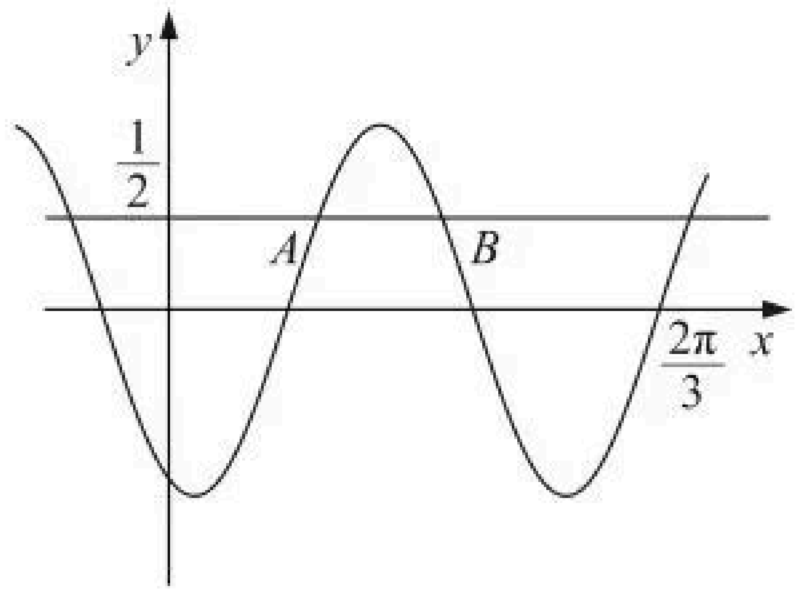
三、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共计 20 分.

13. 已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{3}$，$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$，则 $|\boldsymbol{b}|=$__________.

14. 底面边长为 4 的正四棱锥平行于其底面的平面所截，截去一个地面边长为 2，高为 3 的正四棱锥，所得棱台的体积为__________.

15. 已知直线 $x-my+1=0$ 与 $\odot C:(x-1)^2+y^2=4$ 交于 A，B 两点，写出满足"$\triangle ABC$ 面积为 $\frac{8}{5}$"的 m 的一个值__________.

16. 已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$，如图，$A$，$B$ 是直线 $y=\frac{1}{2}$ 与曲线 $y=f(x)$ 的两个交点，若 $|AB|=\frac{\pi}{6}$，则 $f(\pi)=$__________.



四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（10 分）

记$\triangle ABC$的内角A，B，C的对边分别为a，b，c，已知$\triangle ABC$面积为$\sqrt{3}$，D为BC的中点，且$AD=1$.

（1）若$\angle ADC=\dfrac{\pi}{3}$，求$\tan B$；

（2）若$b^2+c^2=8$，求b，c.

18.（12 分）

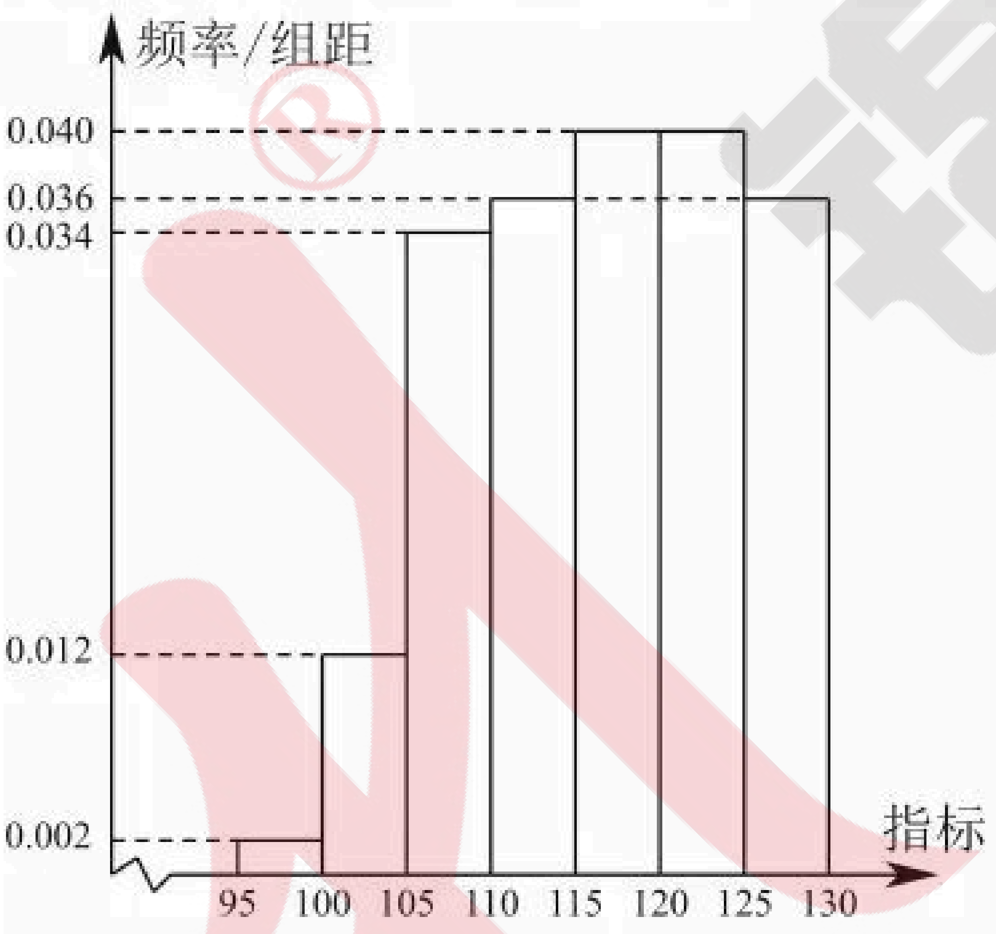
已知$\{a_n\}$为等差数列，$b_n=\begin{cases}a_n-6, & n\text{为奇数},\\ 2a_n, & n\text{为偶数}.\end{cases}$记$S_n$，$T_n$分别为数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的前$n$项和，$S_4=32$，$T_3=16$.

（1）求$\{a_n\}$的通项公式；

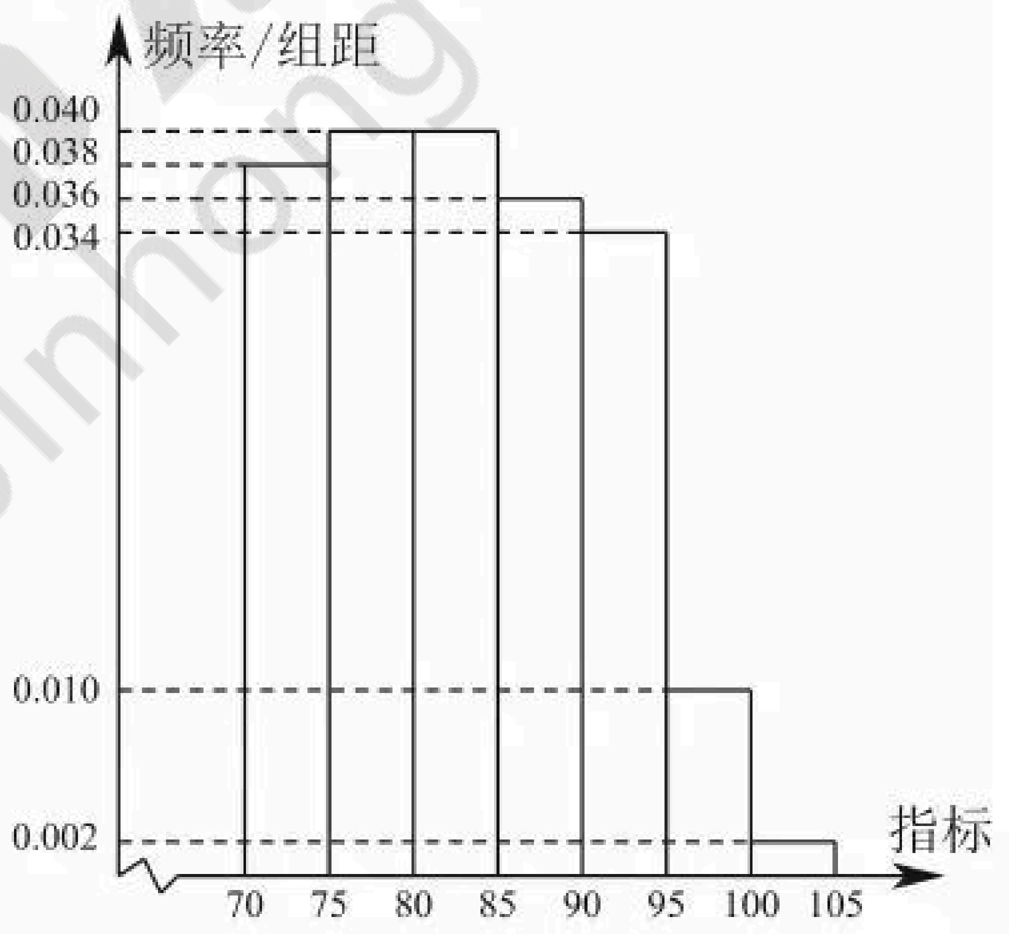
（2）证明：当$n>5$时，$T_n>S_n$.

19.（12 分）

某研究小组经过研究发现某种疾病的患病者与未患病者的某项医学指标有明显差异，经过大量调查，得到如下的患病者和未患病者该指标的频率分布直方图：



患病者



未患病者

利用该指标制定一个检测标准，需要确定临界值c，将该指标大于c的人判定为阳性，小于或等于c的人判定为阴性. 此检测标准的漏诊率是将患病者判定为阴性的概率，记为$p(c)$；误诊率是将未患病者判定为阳性的概率，记为$q(c)$. 假设数据在组内均匀分布. 以事件发生的频率作为相应事件发生的概率.

（1）当漏诊率$p(c)=0.5\%$时，求临界值c和误诊率$q(c)$；

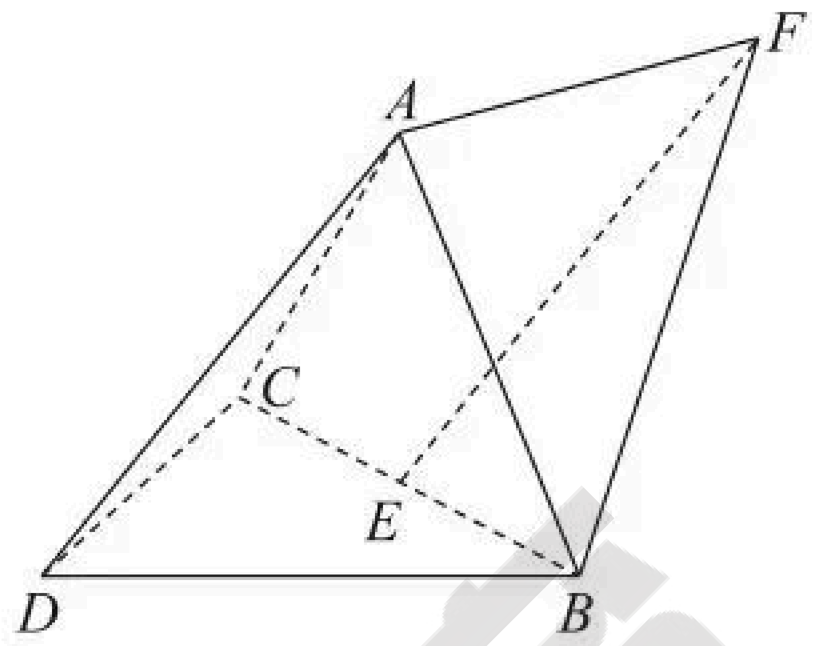
（2）设函数$f(c)=p(c)+q(c)$. 当$c\in[95,105]$，求$f(c)$的解析式，并求$f(c)$在区间$[95,105]$的最小值.

20.（12 分）

如图，三棱锥 $A-BCD$ 中，$DA=DB=DC$，$BD\perp CD$，$\angle ADB=\angle ADC=60^\circ$，$E$ 为 BC 的中点.

（1）证明：$BC\perp DA$；

（2）点 F 满足 $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{DA}$，求二面角 $D-AB-F$ 的正弦值.



21.（12 分）

已知双曲线 C 的中心为坐标原点，左焦点为 $(-2\sqrt{5},0)$，离心率为 $\sqrt{5}$.

（1）求 C 的方程；

（2）记 C 的左、右顶点分别为 A_1，A_2，过点 $(-4,0)$ 的直线与 C 的左支交于 M，N 两点，M 在第二象限，直线 MA_1 与直线 NA_2 交于 P，证明：点 P 在定直线上.

22.（12 分）

（1）证明：当 $0<x<1$ 时，$x-x^2<\sin x<x$；

（2）已知函数 $f(x)=\cos ax-\ln(1-x^2)$，若 $x=0$ 是 $f(x)$ 的极大值点，求 a 的取值范围.