绝密★启用前　　　　试卷类型：A

2023年普通高等学校招生全国统一考试

数学参考答案与解析

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．已知集合 $M=\{-2,-1,0,1,2\}$，$N=\{x|x^2-x-6\geq 0\}$，则 $M\cap N=$

A．$\{-2,-1,0,1\}$　　B．$\{0,1,2\}$　　C．$\{-2\}$　　D．$\{2\}$

【解析】$N\in(-\infty,-2]\cup[3,+\infty)$，所以 $M\cap N=\{2\}$，故选C．

2．已知复数 $z=\dfrac{1-i}{2+2i}$，则 $z-\bar{z}=$

A．$-i$　　B．i　　C．0　　D．1

【解析】$z=\dfrac{1-i}{2+2i}=-\dfrac{1}{2}i$，所以 $z-\bar{z}=-i$，故选A．

3．已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,1)$，$\boldsymbol{b}=(1,-1)$．若 $(\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b})\perp(\boldsymbol{b}+\mu\boldsymbol{b})$，则

A．$\lambda+\mu=1$　　B．$\lambda+\mu=-1$　　C．$\lambda\mu=1$　　D．$\lambda\mu=-1$

【解析】$(\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b})\perp(\boldsymbol{b}+\mu\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}^2+(\lambda+\mu)(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=2(1+\lambda\mu)$，所以 $\lambda+\mu=-1$，故选D．

4．设函数 $f(x)=2^{x(x-a)}$ 在区间 $(0,1)$ 单调递减，则 a 的取值范围是

A．$(-\infty,-2]$　　B．$[-2,0)$　　C．$(0,-2]$　　D．$[2,+\infty)$

【解析】易得，$\dfrac{a}{2}\geq 1$，所以 a 的取值范围是 $[2,+\infty)$，故选D．

5．设椭圆 $C_1:\dfrac{x^2}{a^2}+y^2=1(a>1)$，$C_2:\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 的离心率分别为 e_1，e_2．若 $e_2=\sqrt{3}e_1$，则 $a=$

A．$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$　　B．$\sqrt{2}$　　C．$\sqrt{3}$　　D．$\sqrt{6}$

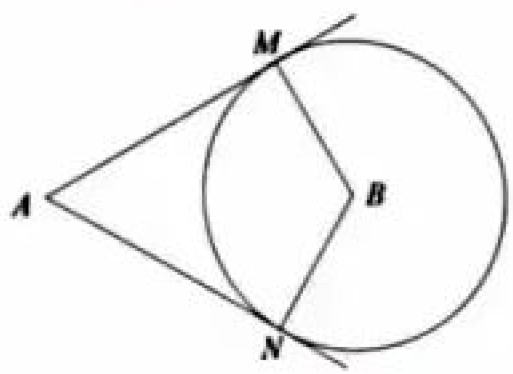
【解析】易得，$e_1=\dfrac{\sqrt{a^2-1}}{a}$，$e_2=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，得 $\dfrac{\sqrt{a^2-1}}{a}=\dfrac{1}{2}$，解得 $a=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，故选A．

6．过点 $(0,-2)$ 与圆 $x^2+y^2-4x-1=0$ 相切的两条直线的夹角为 α，则 $\sin\alpha=$

A．1　　B．$\dfrac{\sqrt{15}}{4}$　　C．$\dfrac{\sqrt{10}}{4}$　　D．$\dfrac{\sqrt{6}}{4}$

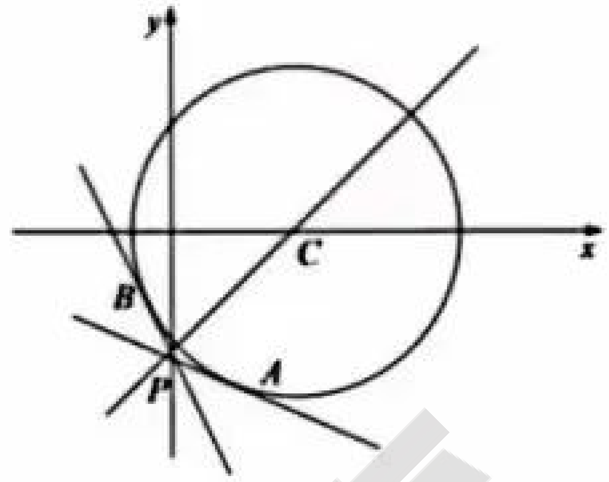
【解析】（方法一）易得，$(x-2)^2+y^2=5$，故圆心 $B(0,-2)$，

记 $A(0,-2)$，设切点为 M,N，$AB=2\sqrt{2}$，$BM=\sqrt{5}$ 故 $AM=\sqrt{3}$



$\sin\frac{\alpha}{2}=\sin\angle MBA=\frac{AM}{AB}=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$， $\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}$， $\sin\alpha=2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{\sqrt{15}}{4}$， 故选 B.

（方法二）因为 $(x-2)^2+y^2=5$，设圆心 $C(2,0)$，



$r=\sqrt{5}$，设点 $P(0,-2)$，则 $|PC|=2\sqrt{2}$，设过点 P 的两条公切线 PA，PB．则 $\angle APB=\alpha$，则 $\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{10}}{4}$， $\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}}{4}$，

$\sin\alpha=2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}=2\cdot\frac{\sqrt{10}}{4}\cdot\frac{\sqrt{6}}{4}=\frac{\sqrt{15}}{4}$，故选 B.

7．记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，设甲：$\{a_n\}$ 为等差数列；乙：$\{\frac{S_n}{n}\}$ 为等差数列，则

A．甲是乙的充分条件但不是必要条件

B．甲是乙的必要条件但不是充分条件

C．甲是乙的充要条件

D．甲既不是乙的充分条件也不是乙的必要条件

【解析】（方法一）a_n 为等差数列，设其首项为 a_1，公差为 d，则 $S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$，

$\frac{S_n}{n}=a_1+\frac{n-1}{2}d=\frac{d}{2}n+a_1-\frac{d}{2}$， $\frac{S_{n+1}}{n+1}-\frac{S_n}{n}=\frac{d}{2}$，故 $\{\frac{S_n}{n}\}$ 为等差数列，则甲是乙的充分条件；

反之，$\{\frac{S_n}{n}\}$ 为等差数列，即 $\frac{S_{n+1}}{n+1}-\frac{S_n}{n}=\frac{nS_{n+1}-(n+1)S_n}{n(n+1)}=\frac{na_{n+1}-S_n}{n(n+1)}$ 为常数，设为 t，即

$\frac{na_{n+1}-S_n}{n(n+1)}=t$，故 $S_n=na_{n+1}-t\cdot n(n+1)$，故 $S_n=(n-1)a_n-t\cdot n(n-1)$，$n\geqslant2$，两式相减有：

$a_n=na_{n+1}-a_n(n-1)-2tn\Rightarrow a_{n+1}-a_n=2t$，对 $n=1$ 也成立，故 $\{a_n\}$ 为等差数列则甲是乙的必要条件，故甲是乙的充要条件，故选 C.

（方法二）因为甲：$\{a_n\}$ 为等差数列，设数列 $\{a_n\}$ 的首项 a_1，公差为 d．即 $S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$，

则 $\frac{S_n}{n}=a_1+\frac{(n-1)}{2}d=\frac{d}{2}n+a_1-\frac{d}{2}$，故 $\{\frac{S_n}{n}\}$ 为等差数列，即甲是乙的充分条件．反之，乙：$\{\frac{S_n}{n}\}$ 为等差数列， $\frac{S_{n+1}}{n+1}-\frac{S_n}{n}=D$， $\frac{S_n}{n}=S_1+(n-1)D$．即

$\frac{S_n}{n}=nS_1+n(n-1)D$． $S_{n-1}=(n-1)S_1+(n-1)(n-2)D$，当 $n\geqslant2$ 时，上两式相减得：

$S_n-S_{n-1}=S_1+2(n-1)d$，当 $n=1$ 时，上式成立．所以 $a_n=a_1+2(n-1)D$．又

$a_{n+1}-a_n=a_1+2nD-[a_2+2(n-1)d]=2D$ 为常数．所以 $\{a_n\}$ 为等差数列．故选 C.

8．已知 $\sin(\alpha-\beta)=\frac{1}{3}$， $\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{6}$ 则 $\cos(2\alpha+2\beta)=$

A. $\frac{7}{9}$　　B. $\frac{1}{9}$　　C. $-\frac{1}{9}$　　D. $-\frac{7}{9}$

【解析】因为 $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{3}$， $\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{6}$， 则 $\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}$ 故 $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$ 。即 $\cos(2\alpha+2\beta)=1-2\sin^2(\alpha+\beta)=1-2\times(\frac{2}{3})^2=\frac{1}{9}$， 故选 B.

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9. 有一组样本数据 $x_1,x_2,\ldots,x_6$，其中 x_1 是最小值， x_6 是最大值，则

A. x_2,x_3,x_4,x_5 的平均数等于 $x_1,x_2,\ldots,x_6$ 的平均数

B. x_2,x_3,x_4,x_5 的中位数等于 $x_1,x_2,\ldots,x_6$ 的中位数

C. x_2,x_3,x_4,x_5 的标准差不小于 $x_1,x_2,\ldots,x_6$ 的标准差

D. x_2,x_3,x_4,x_5 的极差不大于 $x_1,x_2,\ldots,x_6$ 的极差

【解析】因为 $\frac{x_2+x_3+x_4+x_5}{4}-\frac{x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6}{6}=\frac{x_2+x_3+x_4+x_5-2(x_1+x_6)}{12}\neq0$，所以 A 错误：因为 x_1 是最小值， x_6 是最大值，所以 x_2， x_3， x_4， x_5 的中位数的位置与 x_1， x_2， x_3， x_4， x_5， x_6 的中位数的位置相同，所以 B 正确：因为 x_1 是最小值， x_6 是最大值，距离数据 x_1， x_2， x_3， x_4， x_5， x_6 的平均值大，即波动性大，所以标准差大，所以 C 错误：设 x_1， x_2， x_3， x_4， x_5 的最小值 x_2，最大值 x_5 s，则 $x_1\leqslant x_2$， $x_5\leqslant x_6$，所以 $x_6-x_1\geqslant x_5-x_2$，所以 D 正确，故选 BD.

10. 噪声污染问题越来越受到重视.用声压级来度量声音的强弱，定义声压级 $L_p=20\times\lg\frac{p}{p_0}$，其中常数 $p_0(p_0>0)$ 是听觉下限阈值， p 是实际声压，下表为不同声源的声压级：

声源	与声源的距离/m	声压级/dB
燃油汽车	10	60~90
混合动力汽车	10	50~60
电动汽车	10	40

已知在距离燃油汽车、混合动力汽车、电动汽车 10m 处测得实际声压分别为 p_1， p_2， p_3

则

A. $p_1 \geqslant p_2$　　B. $p_2 > 10p_3$　　C. $p_3 = 100p_0$　　D. $p_1 \leqslant 100p_2$

【解析】因为 $L_1 - L_2 = 20\times\lg\frac{p_1}{p_0} - 20\times\lg\frac{p_2}{p_0} = 20\times\lg\frac{p_1}{p_2} \geqslant 0$，所以 $\frac{p_1}{p_2} \geqslant 1$，所以 $p_2 \geqslant p_1$，所以 A 正确；$L_2 - L_3 = 20\times\lg\frac{p_2}{p_3} > 10$，$\lg\frac{p_2}{p_3} > \frac{1}{2}$，$\frac{p_2}{p_3} > e^{\frac{1}{2}}$，所以 B 错误；因为 $L_3 = 20\times\lg\frac{p_3}{p_0} = 40$，$\frac{p_3}{p_0} = 100$，所以 C 正确；$L_1 - L_2 = 20\times\lg\frac{p_1}{p_2} \leqslant 90 - 50 = 40$，$\lg\frac{p_1}{p_2} \leqslant 2$，$\frac{p_1}{p_2} \leqslant 100$，所以 D 正确，故选 ACD.

11. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 R，$f(xy) = y^2f(x) + x^2f(x)$，则

A. $f(0) = 0$　　B. $f(1) = 0$

C. $f(x)$ 是偶函数　　D. $x = 0$ 为 $f(x)$ 的极小值点

【解析】选项 A，令 $x = y = 0$，则 $f(0) = 0\times f(0) + 0\times f(0)$，则 $f(0) = 0$，故 A 正确；
选项 B，令 $x = y = 1$，则 $f(1) = 1\times f(1) + 1\times f(1)$，则 $f(1) = 0$，故 B 正确；
选项 C，令 $x = y = -1$，则 $f(1) = (-1)^2\times f(-1) + (-1)^2\times f(-1)$，则 $f(1) = 0$，再令 $y = -1$，则 $f(-x) = (-1)^2\times f(x) + x^2f(-1)$，即 $f(-x) = f(x)$，故 C 正确；
选项 D，对式子两边同时除以 $x^2y^2 \neq 0$，得到 $\frac{f(xy)}{x^2y^2} = \frac{f(y)}{y^2} + \frac{f(x)}{x^2}$，故可以 $\frac{f(x)}{x^2} = \ln|x|(x\neq 0)$

故可以得到 $f(x) = \begin{cases} x^2\ln|x|, & x\neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$，故 D 选项不正确；故选 ABC.

12. 下列物体中，能够被整体放入棱长为 1（单位：m）的正方体容器（容器壁厚忽略不计）内的有

A. 直径为 0.99m 的球体

B. 所有棱长均为 1.4m 的四面体

C. 底面直径为 0.01m，高为 1.8m 的圆柱体

D. 底面直径为 1.2m，高为 0.01m 的圆柱体

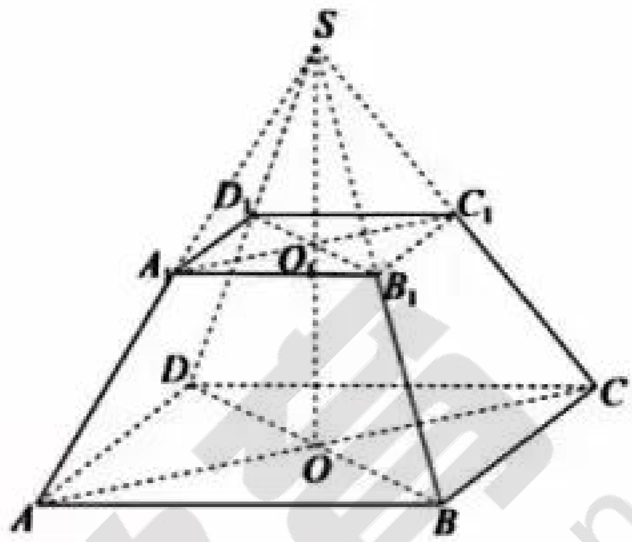
【解析】选项 A，球直径为 0.99<1，故球体可以放入正方体容器内，故 A 正确；选项 B，选择连接正方体的面对角线，可以得到一个正四面体，其棱长为 $\sqrt{2} > 1.4$，故 B 正确；选项 C，底面直径 0.01m，可以忽略不计，但高为 $1.8 > \sqrt{3}$，$\sqrt{3}$ 为正方体的体对角线的长，故 C 不正确；选项 D，底面直径为 $1.2 < \sqrt{3}$，高为 0.01m 的圆柱体，其高度可以忽略不计，故 D 正确．故选 ABD.

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 某学校开设了 4 门体育类选修课和 4 门艺术类选修课，学生需从这 8 门课中选修 2 门或 3 门课，并且每类选修课至少选修 1 门，则不同的选课方案有________种（用数字作答）.

【解析】当从这 8 门课中选修 2 门课时，共有 $C_4^1 \cdot C_4^1 = 16$；当从这 8 门课中选修 3 门课时，共有 $C_4^1 \cdot C_4^2 + C_4^2 \cdot C_4^1 = 48$；综上，共有 64 种．故填：64．

14. 在四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=2$，$A_1B_1=1$，$AA_1=\sqrt{2}$，则该棱台的体积为________．



【解析】如图，将正四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 补成正四棱锥，则 $AO=\sqrt{2}$，$SA=2\sqrt{2}$，$OO_1=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$，故

$V=\dfrac{1}{3}(S_1+S_2+\sqrt{S_1S_2})h$，$V=\dfrac{1}{3}(S_1+S_2+\sqrt{S_1S_2})h$，

$V=\dfrac{1}{3}(2^2+1^2+\sqrt{2^2\cdot 1^2})\cdot\dfrac{\sqrt{6}}{2}=\dfrac{7\sqrt{6}}{6}$ 故填：$\dfrac{7\sqrt{6}}{6}$．

15. 已知函数 $f(x)=\cos\omega x-1(\omega>0)$ 在区间 $[0,2\pi]$ 有且仅有 3 个零点，则 ω 的取值范围是________．

【解析】令 $f(x)=\cos\omega x-1=0$，得 $\cos\omega x=1$，又 $x\in[0,2\pi]$，则 $\omega x\in[0,2\omega\pi]$，所以 $4\pi\leqslant 2\omega\pi<6\pi$，即 $2\leqslant\omega<3$，故填：$[2,3)$．

16. 已知双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2．点 A 在 C 上，点 B 在 y 轴上，$\overrightarrow{F_1A}\perp\overrightarrow{F_1B}$，$\overrightarrow{F_2A}=-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{F_2B}$，则 C 的离心率为________．

【解析】由 $\overrightarrow{F_2A}=-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{F_2B}$，得 $\dfrac{|\overrightarrow{F_2A}|}{|\overrightarrow{F_2B}|}=\dfrac{2}{3}$，设 $\overrightarrow{F_2A}=-2x$，$\overrightarrow{F_2B}=3x$ 由对称性可得 $|\overrightarrow{F_1B}|=3x$，由定义可得，$|\overrightarrow{F_1A}|=2x+2a$，$|\overrightarrow{AB}|=5x$，设 $\angle F_1AF_1=\theta$，则 $\sin\theta=\dfrac{3x}{5x}=\dfrac{3}{5}\Rightarrow\cos\theta=\dfrac{4}{5}=\dfrac{2x+2a}{5x}$，解得 $x=a$，所以 $|AF_1|=2x+2a$，$|AF_2|=2a$，在 $\triangle AF_1F_2$ 中，则余弦定理可得 $\cos\theta=\dfrac{16a^2+4a^2-4c^2}{16a^2}=\dfrac{4}{5}$ 即 $5c^2=9a^2$ 可得 $e=\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$，故填：$\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. （10 分）

已知在 $\triangle ABC$ 中，$A+B=3C$，$2\sin(A-C)=\sin B$．

（1）求 $\sin A$；

（2）设 $AB=5$，求 AB 边上的高．

【解析】（1）因为 $A+B=3C$，所以 $A+B=3(\pi-A-B)$，所以 $A+B=\dfrac{4\pi}{3}$，所以 $C=\dfrac{\pi}{4}$，由题意得，$2\sin(A-C)=\sin B$，即 $2\sin A\cos C-2\cos A\sin C=\sin A\cos C+\cos A\sin C$，所以 $\sin A\cos C=3\cos A\sin C$，所以 $\tan A=3\tan C=3$，所以 $\sin A=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$．

（2）由正弦定理得，$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$，$a=\frac{c\sin A}{\sin C}=\frac{5\times\frac{3\sqrt{10}}{10}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=3\sqrt{5}$，因为$\sin A>\sin C$，

即 $A>C$，由（1）得 $\sin A=3\cos A$，则 A 是锐角，$\cos A=\frac{\sqrt{10}}{10}$，

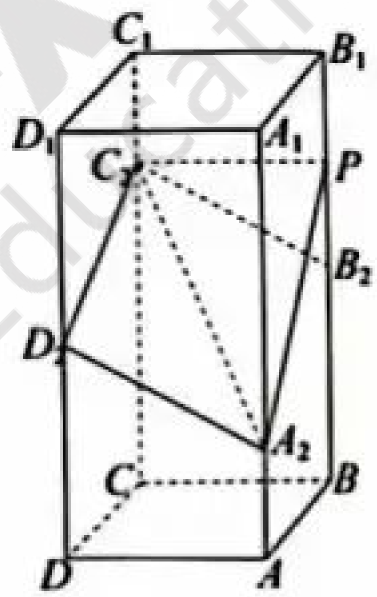
$\sin B=\sin(A+C)=\sin A\cos C+\cos A\sin C=\frac{3\sqrt{10}}{10}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{10}}{10}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，由正弦

定理，$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$，得 $b=\frac{c\sin C}{\sin B}=\frac{5\times\frac{2\sqrt{5}}{5}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=2\sqrt{10}$．故求 AB 边上的高为

$b\sin A=2\sqrt{10}\times\frac{3\sqrt{10}}{10}=6$．

18．（12分）

如图，在正四棱锥 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=2$，$AA_1=4$，点 A_2，B_2，C_2，D_2 分别在棱 AA_1，BB_1，CC_1，DD_1 上，$AA_2=1$，$BB_2=DD_2=2$，$CC_2=3$．



（1）证明：$B_2C_2/\!/A_2D_2$；

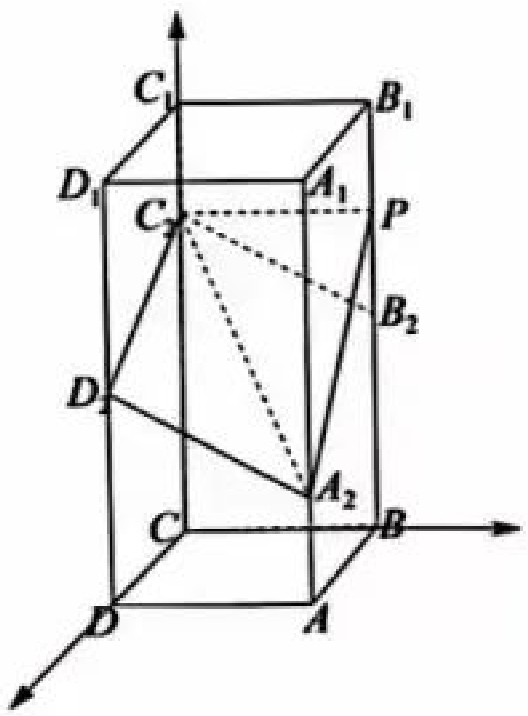
（2）点 P 在棱 BB_1 上，当二面角 $P-A_2C_2-D_2$ 为150°时，求 B_2P．

（1）

方法一：证明：如图，连接 A_2B_2，在直角梯形 $C_1D_1D_2C_2$ 中，易计算 $C_2D_2=\sqrt{2}$，同理得 $C_2B_2=\sqrt{2}$，$A_2B_2=\sqrt{2}$，$A_2D_2=\sqrt{2}$，所以 $C_2B_2A_2D_2$ 为平行四边形，所以 $B_2C_2/\!/A_2D_2$；

方法二：证明：易得，$A_2B_2=B_2C_2=C_2D_2=A_2D_2=\sqrt{5}$，，

所以四边形 $A_2B_2C_2D_2$ 是菱形，所以 $B_2C_2/\!/A_2D_2$；



方法三：证明：

$\overrightarrow{B_2C_2}=\overrightarrow{B_2B_1}+\overrightarrow{C_1C_2}+\overrightarrow{B_1C_1}=\overrightarrow{DD_2}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}\Rightarrow B_2C_2/\!/A_2D_2$

【解析】（2）如图，以 C 为原点，分别以 CD，CB，CC 为 x，y，z 轴建系，则 $A_2=(2,2,1)$，$C_2=(0,0,3)$，$D_2=(2,0,2)$，

$P=(0,2,t)$ 则 $\overrightarrow{A_2C_2}=(-2,-2,2)$，$\overrightarrow{A_2D_2}=(0,-2,1)$，

$\overrightarrow{A_2P}=(-2,0,t-1)$，设$\overrightarrow{n_1}=(x_1,y_1,z_1)$，$\overrightarrow{n_2}=(x_2,y_2,z_2)$分别为平面$A_2C_2D_2$，$A_2C_2P$的法向量，则$\begin{cases}2x_1-2y_1+2z_1=0\\-2y_1+z_1\end{cases}$，则$\overrightarrow{n_1}=(1,1,2)$，同理$\overrightarrow{n_2}=(t-1,3-t,2)$，则

$$\left|\frac{6}{\sqrt{6}\times\sqrt{(t-1)^2+(3-t)^2+4}}\right|=\frac{3}{2}\Rightarrow t^2-4t=0，则t=1或t=3，则B_2P=|2-t|=1.$$

19. （12分）

已知函数$f(x)=a(e^x+a)-x$.

（1）讨论$f(x)$的单调性；

（2）证明：当$a>0$时，$f(x)>2\ln a+\frac{3}{2}$.

【解析】（1）由题知定义域为R，且$f'(x)=ae^x-1$

$a\leqslant 0$时，$f'(x)<0$，故$f'(x)$在R上单调递减；

$a>0$时，$f'(x)>0$，则$x>-\ln a$，则$x<\ln a$；

故$f(x)$在$(-\infty,-\ln a)$单调递减，在$(-\ln a,+\infty)$单调递增，

综上：当$a\leqslant 0$时，故$f(x)$在R上单调递减；

当$a>0$时，$f(x)$在$(-\infty,-\ln a)$单调递减，在$(-\ln a,+\infty)$单调递增.

（2）证明：当$a>0$时，要证：$f(x)>2\ln a+\frac{3}{2}$，即证：$a(e^x+a)-x>2\ln a+\frac{3}{2}$，

只需证：$e^{x+\ln a}-(x+\ln a+1)+\frac{1}{2}(a^2-\ln a^2-1)+\frac{1}{2}a^2>0$，

又因为$e^x\geqslant x+1$，故$e^{x+\ln a}-(x+\ln a+1)\geqslant 0$又$\ln a\leqslant x-1$，故$\frac{1}{2}(a^2-\ln a^2-1)\geqslant 0$，且$\frac{1}{2}a^2>0$，故$e^{x+\ln a}-(x+\ln a+1)+\frac{1}{2}(a^2-\ln a^2-1)+\frac{1}{2}a^2>0$显然成立，所以$f(x)>2\ln a+\frac{3}{2}$.

20. （12分）

设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，且$d>1$，令$b_n=\frac{n^2+n}{a_n}$，记S_n、T_n分别为数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的前n项和.

（1）若$3a_2=3a_1+a_3$，$S_3+T_3=21$，求$\{a_n\}$的通项公式；

（2）若$\{b_n\}$为等差数列，且$S_{99}-T_{99}=99$，求d.

【解析】（1）因为$3a_2=3a_1+a_3$故$3d=a_3=a_1+2d$，即$a_1=d$，故$a_n=nd$，所以

$b_n=\frac{n^2+n}{nd}=\frac{n+1}{d}$，$S_n=\frac{n(n+1)d}{2}$，$T_n=\frac{n(n+3)}{2d}$，又$S_3+T_3=21$，即$\frac{3\ 4d}{2}+\frac{3\ 6}{2d}=21$，

即$2d^2-7d+3=0$，故$d=3$或$d=\frac{1}{2}$（舍），故$\{a_n\}$的通项公式为：$a_n=3_n$；

（2）若$\{b_n\}$为等差数列，则$2b_2=b_1+b_3 3$，即$2\cdot\frac{2\ 3}{a_1+d}=\frac{1\ 2}{a_1}+\frac{3\ 4}{a_1+2d}$，即

$a_1^2-3a_1d+2d^2=0$，所以$a_1=d$或$a_1=2d$，当$a_1=d$时，$a_n=nd$，故$S_n=\frac{n(n+1)d}{2}$，

$T_n=\frac{n(n+3)}{2d}$，又$S_{99}-T_{99}=99$，即$\frac{99\ 100d}{2}-\frac{99\ 102}{2d}=99$，即

$50d^2-d-51=0$，所以$d=\frac{1}{5}$或$d=1$（舍）；

即$a_1=2d$时，$a_n=(n+1)d$，$b_n=\frac{n}{d}$，故$S_n=\frac{n(n+3)d}{2}$，$T_n=\frac{n(n+1)}{2d}$，又$S_{99}-T_{99}=99$，

即$\frac{99\ 102d}{2}-\frac{99\ 100}{2d}=99$，即$50d^2-d-50=0$，所以所以$d=-\frac{51}{50}$（舍）或$d=1$（舍）；

综上：$d=\frac{51}{50}$．

21．（12分）

甲、乙两人投篮，每次由其中一次收篮，规则如下：若命中则此人继续投篮，若未命中则换为对方投篮．无论之前投篮情况如何，甲每次投篮的命中率均为0.6，乙每次投篮的命中率均为0.8．由抽签确定第1次投篮的人选，第1次投篮的人是甲、乙的概率各为0.5．

（1）求第2次投篮的人是乙的概率；

（2）求第i次投篮的人是甲的概率；

（3）已知：若随机变量X_i，服从两点分布，且$P(X_i=1)=P(X_i=0)=q_i$：$i=1,2,\cdots n$，则$E(\sum_{i=1}^{n}X_i)=E(\sum_{i=1}^{n}q_i)$．记前$n$次（即从第1次到第$n$次投篮）中甲投篮的次数为$Y$，求$E(Y)$．

【解析】（1）第二次是乙的概率为$0.5\times0.4+0.5\times0.8=0.6$；

（2）第i次是乙投球的概率为$1-p_i$，则$p_{i+1}=0.6p_i+0.2(1-p_i)=0.4p_i+0.2$，

构造等比数列$p_{i+1}+\lambda=\frac{2}{5}(p_i+\lambda)$，解得$\lambda=\frac{1}{3}$，

则$p_{i+1}-\frac{1}{3}=\frac{2}{5}(p_i+\lambda)$，又$p_1=\frac{1}{2}$，$p_1-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$，$p_i-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}\cdot(\frac{2}{5})^{i-1}$，$p_i=\frac{1}{6}\cdot(\frac{2}{5})^{i-1}+\frac{1}{3}$，

（3）当$n\in N^+$时，$E(Y)=p_1+p_2+\cdots p_i=\frac{1}{6}\cdot\frac{1-(\frac{2}{5})^n}{1-\frac{2}{5}}+\frac{n}{3}=\frac{5}{18}[1-(\frac{2}{5})^n]+\frac{n}{3}$

当$n=0$时，$E(Y)=0$，符合上式，故$E(Y)=\frac{5}{18}[1-(\frac{2}{5})^n]+\frac{n}{3}$．

22. （12 分）

在平面直角坐标系 xOy 中，点 P 到 x 轴的距离等于其到点 $(0,\frac{1}{2})$ 的距离，动点 P 的轨迹为 W.

（1）求 W 的方程；

（2）若矩形 $ABCD$ 上有三个点在 W 上，证明：$ABCD$ 的周长 $>3\sqrt{3}$.

【解析】（1）设 $P(x,\ y)$，则 $|y|=\sqrt{x^2+(y-\frac{1}{2})^2}$，化简得 $y=x^2+\frac{1}{4}$.

或者利用抛物线的定义可知，点 P 在以 $F(0,\frac{1}{2})$ 为焦点，x 轴为准线的抛物线上，其中 $P=\frac{1}{2}$

从而 $x^2=2p(y-\frac{1}{4})$，故 W 的轨迹方程为 $y=x^2+\frac{1}{4}$.

不妨设 A，B，D 三点在 W 上，且有 $BA\perp DA$，

设 $A(a,\ a^2+\frac{1}{4})$，设 BA，DA 的斜率分别 k，$-\frac{1}{k}$，由对称性不妨设 $k\leqslant 1$，

联立方程 $\begin{cases} y=x^2+\frac{1}{4} \\ y=k(x-a)+a^2+\frac{1}{4} \end{cases}$ 可得 $x^2-kx+ka-a^2=0$

由韦达定理得 $x_A+x_B=k$，所以 $B=[k-a\cdot(k-a)^2+\frac{1}{4}]$. $|AB|=\sqrt{1+k^2}\,|k-2a|$，

同理可得，$|AD|=\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}\left|-\frac{1}{k}-2a\right|=\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}\left|\frac{1}{k}+2a\right|$，

所以

$$|AB|+|CD|=\sqrt{1+k^2}\,|k-2a|+\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}\left|\frac{1}{k}+2a\right|\geqslant\sqrt{1+k^2}\left(|k-2a|+\left|\frac{1}{k}+2a\right|\right)\geqslant\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{k+\frac{1}{k}}=\sqrt{\frac{(1+k^2)^3}{k^2}}$$

设 $f(m)=\frac{(1+m)^3}{m}=m^2+3m+\frac{1}{m}+3$，可得 $f'(m)=2m+3-\frac{1}{m^2}=\frac{(2m-1)(m+1)^2}{m^2}$，

可知 $f(m)$ 在 $(0,\frac{1}{2})$ 单调递减，$(\frac{1}{2},0)$ 单调递增，所以 $f(m)$ 在 $(0,1)$ 上的最小值为 $f(\frac{1}{2})=\frac{27}{4}$，

所以 $|AB|+|AD|=f(k^2)\geqslant\frac{3}{2}\sqrt{3}$，收于两处取等的条件不一致，

所以矩形的周长为 $2(|AB|+|AD|)>3\sqrt{3}$.