绝密★启用前　　　　试卷类型：A

2023 年普通高等学校招生全国统一考试

数　学

本试卷共 4 页，22 小题，满分 150 分。考试用时 120 分钟。

注意事项： 1．答题前，请务必将自己的姓名、准考证号用黑色字迹的签字笔或钢笔分别填写在试题卷和答题卡上。用 2B 铅笔将试卷类型（A）填涂在答题卡相应位置上。将条形码横贴在答题卡右上角“条形码粘贴处”。

2．作答选择题时，选出每小题答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目选项的答案信息点涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案，答案不能答在试卷上。

3．非选择题必须用黑色字迹钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新的答案；不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答的答案无效。

4．考生必须保持答题卡的整洁。考试结束后，将试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共计 40 分．每小题给出的四个选项中，只有一个选项是正确的．请把正确的选项填涂在答题卡相应的位置上．

1．已知集合 $M=\{-2,-1,0,1,2\}$，$N=\{x\mid x^2-x-6\geqslant 0\}$，则 $M\cap N=$

A．$\{-2,-1,0,1\}$　　B．$\{0,1,2\}$　　C．$\{-2\}$　　D．$\{2\}$

2．已知 $z=\dfrac{1-\mathrm{i}}{2+2\mathrm{i}}$，则 $z-\bar{z}=$

A．$-\mathrm{i}$　　B．i　　C．0　　D．1

3．已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,1)$，$\boldsymbol{b}=(1,-1)$．若 $(\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b})\perp(\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b})$，则

A．$\lambda+\mu=1$　　B．$\lambda+\mu=-1$　　C．$\lambda\mu=1$　　D．$\lambda\mu=-1$

4．设函数 $f(x)=2^{x(x-a)}$ 在区间 $(0,1)$ 单调递减，则 a 的取值范围是

A．$(-\infty,-2]$　　B．$[-2,0)$　　C．$(0,2]$　　D．$[2,+\infty)$

5．设椭圆 $C_1:\dfrac{x^2}{a^2}+y^2=1(a>1)$，$C_2:\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 的离心率分别为 e_1，e_2．若 $e_2=\sqrt{3}e_1$，则 $a=$

A．$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$　　B．$\sqrt{2}$　　C．$\sqrt{3}$　　D．$\sqrt{6}$

6．过 $(0,-2)$ 与圆 $x^2+y^2-4x-1=0$ 相切的两条直线的夹角为 α，则 $\sin\alpha=$

A．1　　B．$\dfrac{\sqrt{15}}{4}$　　C．$\dfrac{\sqrt{10}}{4}$　　D．$\dfrac{\sqrt{6}}{4}$

7．记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，设甲：$\{a_n\}$ 为等差数列；乙：$\{\frac{S_n}{n}\}$ 为等差数列，则

A．甲是乙的充分条件但不是必要条件

B．甲是乙的充分条件但不是必要条件

C．甲是乙的充要条件

D．甲是乙的充分条件但不是必要条件

8．已知 $\sin(\alpha-\beta)=\frac{1}{3}$，$\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{6}$，则 $\cos(2\alpha+2\beta)=$

A．$\frac{7}{9}$　　B．$\frac{1}{9}$　　C．$-\frac{1}{9}$　　D．$-\frac{7}{9}$

二、选择题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共计 20 分．每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求。全部选对得 5 分，选对但不全得 2 分，有选错的得 0 分。

9．有一组样本数据 $x_1,x_2,\cdots,x_6$，其中 x_1 是最小值，x_6 是最大值，则

A．x_2,x_3,x_4,x_5 的平均数等于 $x_1,x_2,\cdots,x_6$ 的平均数

B．x_2,x_3,x_4,x_5 的中位数等于 $x_1,x_2,\cdots,x_6$ 的中位数

C．x_2,x_3,x_4,x_5 的标准差数等于 $x_1,x_2,\cdots,x_6$ 的标准差

D．x_2,x_3,x_4,x_5 的极差不大于 $x_1,x_2,\cdots,x_6$ 的极差

10．噪声污染问题越来越受到重视．用声压级来度量声音的强弱，定义声压级 $L_p=20\times\lg\frac{p}{p_0}$，其中常数 $p_0(p_0>0)$ 是听觉下限阈值，p 是实际声压．下表为不同声源的声压级：

声源	与声源的距离/m	声压级/dB
燃油汽车	10	60～90
混合动力汽车	10	50～60
电动汽车	10	40

已知在距离燃油汽车，混合动力汽车，电动汽车 10 m 处测得实际声压分别为 p_1，p_2，p_3，则

A．$p_1\geqslant p_2$　　B．$p_2\geqslant 10p_3$　　C．$p_3=100p_0$　　D．$p_1\leqslant 100p_2$

11．已知函数 $f(x)$ 的定义域为 **R**，$f(xy)=y^2f(x)+x^2f(y)$，则

A．$f(0)=0$　　B．$f(1)=0$

C．$f(x)$ 是偶函数　　D．$x=0$ 为 $f(x)$ 的极小值点

12．下列物体中，能被整体放入棱长为 1（单位：m）的正方体容器（容器壁厚度忽略不计）内的有

A．直径为 0.99 m 的球体

B．所有棱长均为 1.4 m 的四面体

C．底面直径为 0.01 m，高为 1.8 m 的圆柱体

D．底面直径为 1.2 m，高位 0.01 m 的圆柱体

三、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共计 20 分.

13．某学校开设了 4 门体育类选修课和 4 门艺术类选修课，学生需从这 8 门课中选修 2 门或 3 门课，并且每类选修课至少选修 1 门，则不同的选课方案共有__________种（用数字作答）.

14．在正四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=2$，$A_1B_1=1$，$AA_1=\sqrt{2}$，则该棱台的体积为__________.

15．已知函数 $f(x)=\cos\omega x-1(\omega>0)$ 在区间 $[0,\ 2\pi]$，有且仅有 3 个零点，则 ω 的取值范围是__________.

16．已知双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2．点 A 在 C 上，点 B 在 y 轴上，$\overrightarrow{F_1A}\perp\overrightarrow{F_2B}$，$\overrightarrow{F_2A}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{F_2B}$，则 C 的离心率为__________.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17．（10 分）

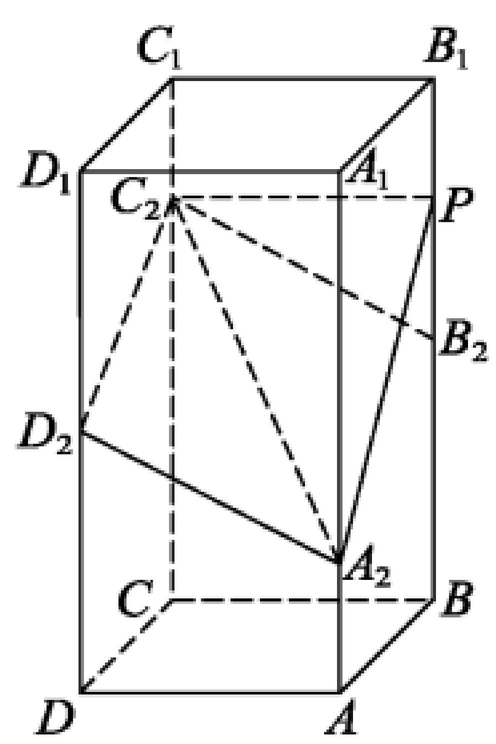
已知在△ABC 中，$A+B=3C$，$2\sin(A-C)=\sin B$.

（1）求 $\sin A$；

（2）设 $AB=5$，求 AB 边上的高.

18．（12 分）

如图，在正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=2$，$AA_1=4$．点 A_2，B_2，C_2，D_2 分别在棱 AA_1，BB_1，CC_1，DD_1 上，$AA_2=1$，$BB_2=DD_2=2$，$CC_2=3$.



（1）证明：$B_2C_2 // A_2D_2$；

（2）点 P 在棱 BB_1 上，当二面角 $P-A_2C_2-D_2$ 为 150°时，求 B_2P.

19．（12 分）

已知函数 $f(x)=a(e^x+a)-x$．

（1）讨论 $f(x)$ 的单调性；

（2）证明：当 $a>0$ 时，求证：$f(x)>2\ln a+\dfrac{3}{2}$．

20．（12 分）

设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，且 $d>1$．令 $b_n=\dfrac{n^2+n}{a_n}$，记 S_n，T_n 分别为数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 的前 n 项和.

（1）若 $3a_2=3a_1+a_3$，$S_3+T_3=21$，求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）若 $\{b_n\}$ 为等差数列，且 $S_{99}-T_{99}=99$，求 d.

21．（12 分）

甲乙两人投篮，每次由其中一人投篮，规则如下：若命中则此人继续投篮，若未命中则换为对方投篮. 无论之前投篮情况如何，甲每次投篮的命中率均为 0.6，乙每次投篮的命中率均为 0.8，由抽签决定第一次投篮的人选，第一次投篮的人是甲，乙的概率各为 0.5.

（1）求第 2 次投篮的人是乙的概率；

（2）求第 i 次投篮的人是甲的概率；

（3）已知：若随机变量 X_i 服从两点分布，且 $P(X_i=1)=1-P(X_i=0)=q_i$，$i=1,2,\cdots,n$，则 $E(\sum\limits_{i=1}^{n}X_i)=\sum\limits_{i=1}^{n}q_i$．记前 n 次（即从第 1 次到第 n 次投篮）中甲投篮的次数为 Y，求 $E(Y)$．

22．（12 分）

在直角坐标系 xOy 中，点 P 到 x 轴的距离等于点 P 到点 $(0,\dfrac{1}{2})$ 的距离，记动点 P 的轨迹为 W.

（1）求 W 的方程；

（2）已知矩形 $ABCD$ 有三个顶点在 W 上，证明：矩形 $ABCD$ 的周长大于 $3\sqrt{3}$．