

理科数学参考解答及评分参考

1. D 2. A 3. D 4. C 5. C 6. A 7. B 8. A 9. C 10. B 11. D 12. D

13. $1-i$ 14. $-\frac{11}{2}$ 15. $3 \times 2^{n-1} - 2$ 16. $16(\sqrt{2}-1)\pi$

17. (12 分)

解析：(1) 甲生产线抽取 200 件产品中，评分在 $(75, 80)$, $[80, 85)$, $[85, 90)$, $[90, 95)$, $[95, 100]$ 的频率分别为 $0.05, 0.05, 0.15, 0.5, 0.25$ 2 分
 则评分均值为 $\bar{x} = 77.5 \times 0.05 + 82.5 \times 0.05 + 87.5 \times 0.15 + 92.5 \times 0.5 + 97.5 \times 0.25 = 91.75$.

所以，甲生产线抽取 200 件产品的评分的均值为 91.75 分. 4 分

(2) 分别在甲、乙生产线抽取到“优质品”的概率为 $\frac{3}{4}, \frac{1}{2}$ ，又 $\xi = 0, 1, 2, 3, 4$.

则 $P(\xi=0) = C_2^0 \left(\frac{1}{4}\right)^2 \times C_2^0 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{64}$, 5 分

$P(\xi=1) = C_2^1 \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot C_2^0 \left(\frac{1}{2}\right)^2 + C_2^0 \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot C_2^1 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{8}{64}$, 6 分

$P(\xi=2) = C_2^2 \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot C_2^0 \left(\frac{1}{2}\right)^2 + C_2^1 \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot C_2^1 \left(\frac{1}{2}\right)^2 + C_2^0 \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot C_2^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{22}{64}$, 7 分

$P(\xi=3) = C_2^1 \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot C_2^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 + C_2^2 \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot C_2^1 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{24}{64}$, 8 分

$P(\xi=4) = C_2^2 \left(\frac{3}{4}\right)^2 \times C_2^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{64}$ 9 分

则 ξ 的分布列为

ξ	0	1	2	3	4
P	$\frac{1}{64}$	$\frac{8}{64}$ 或填 $\frac{1}{8}$	$\frac{22}{64}$ 或填 $\frac{11}{32}$	$\frac{24}{64}$ 或填 $\frac{3}{8}$	$\frac{9}{64}$

..... 10 分

故数学期望 $EX = 0 \times \frac{1}{64} + 1 \times \frac{8}{64} + 2 \times \frac{22}{64} + 3 \times \frac{24}{64} + 4 \times \frac{9}{64} = \frac{160}{64} = \frac{5}{2}$ 12 分

18. (12 分)

解析：(1) 在 $\triangle ABC$ 中，由正弦定理及 $b=2, \sin B : \sin C = \sqrt{2} : 2$,

可得 $c = \frac{b \sin C}{\sin B} = 2 \times \frac{2}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$ 3 分

(2) 由 $\sin A : \sin B : \sin C = 1 : \sqrt{2} : 2$ 及正弦定理得 $a : b : c = 1 : \sqrt{2} : 2$,

再由余弦定理有 $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{5\sqrt{2}}{8}$, 6 分

(3) 由(2)可得 $\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \frac{\sqrt{14}}{8}$,

所以 $\sin 2A = 2\sin A \cos A = 2 \times \frac{\sqrt{14}}{8} \times \frac{5\sqrt{2}}{8} = \frac{5\sqrt{7}}{16}$,

$\cos 2A = 2\cos^2 A - 1 = \frac{9}{16}$ 9 分

所以 $\sin\left(2A - \frac{\pi}{3}\right) = \sin 2A \cos \frac{\pi}{3} - \cos 2A \sin \frac{\pi}{3}$

$$= \frac{5\sqrt{7}}{16} \cdot \frac{1}{2} - \frac{9}{16} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{5\sqrt{7} - 9\sqrt{3}}{32}, \text{ 12 分}$$

19. (12 分)

解析:(1) 当 M 为 PD 的中点时满足条件. 证明如下: 1 分

设 O 为 AC, BD 的交点.

因为四边形 $ABCD$ 为正方形, 所以 O 为 BD 的中点,

故在 $\triangle PBD$ 中, OM 为 $\triangle PBD$ 的中位线, 即 $OM \parallel BP$ 2 分

又因为 $PA \perp$ 平面 $ABCD, CQ \perp$ 平面 $ABCD$,

所以 $AP \parallel CQ$, 即四点 A, C, P, Q 共面,

又因为 $PA = CQ$, 所以四边形 $ACQP$ 为平行四边形, 所以 $AC \parallel PQ$ 3 分

而 AC 与 OM 相交, PQ 与 BP 相交, 所以平面 $ACM \parallel$ 平面 BPQ .

又因为 $AM \subset$ 平面 ACM , 所以直线 $AM \parallel$ 平面 BPQ 5 分

(2) 因为 $PA \perp$ 平面 $ABCD$, 所以 $PA \perp AB$.

因为四边形 $ABCD$ 为正方形, 所以 $AB \perp AD$, 故 $AB \perp$ 平面 PAD .

又因为 $AM \subset$ 平面 PAD , 所以 $AB \perp AM$, 即 $\triangle ABM$ 为直角三角形.

由于 $S_{\triangle ABM} = \frac{1}{2} |AB| |AM|$, 故当 $|AM|$ 最小时, $S_{\triangle ABM}$ 最小, 此时 $AM \perp PD$ 7 分

因为 $AD = 4, PA = 2, PA \perp AD$,

$$\text{所以 } AM = \frac{4\sqrt{5}}{5}, PM = \frac{2\sqrt{5}}{5}, \text{ 即 } PM = \frac{1}{5} PD.$$

由 $PA \perp AB, PA \perp AD, AB \perp AD$, 可以以 AB, AD, AP 所在直线为 x, y, z 轴建立如图所示坐标系.

则 $A(0,0,0), B(4,0,0), D(0,4,0), C(4,4,0), P(0,0,2)$,

所以 $M(0, \frac{4}{5}, \frac{8}{5})$ 9 分

所以 $\overrightarrow{DC} = (4, 0, 0) = 4(1, 0, 0)$,

$\overrightarrow{DM} = (0, -\frac{16}{5}, \frac{8}{5}) = \frac{8}{5}(0, -2, 1)$.

由上, 易得平面 DCM 的一个法向量为 $n_1 = (0, 1, 2)$.

又因为 $\overrightarrow{BC} = (0, 4, 0), \overrightarrow{BM} = (-4, \frac{4}{5}, \frac{8}{5}) = -\frac{4}{5}(5, -1, -2)$,

设平面 BCM 的法向量为 $n_2 = (x_2, y_2, z_2)$, 则 $\begin{cases} y_2 = 0, \\ 5x_2 - y_2 - 2z_2 = 0. \end{cases}$

可得平面 BCM 的一个法向量为 $n_2 = (2, 0, 5)$.

所以 $\cos \langle n_1, n_2 \rangle = \frac{10}{\sqrt{5} \times \sqrt{29}} = \frac{2\sqrt{145}}{29}$ 11 分

注意到二面角 $B-CM-D$ 的平面角是钝角,

所以二面角 $B-CM-D$ 的余弦值为 $-\frac{2\sqrt{145}}{29}$ 12 分

20. (12 分)

解析: (1) 由题意 $c = b = \sqrt{2}$, 从而 $a = \sqrt{b^2 + c^2} = 2$,

于是 C 的方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$ 2 分

(2) 设 $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2), N(2\sqrt{2}, n)$, 直线 PQ 的方程为 $x = ty + \sqrt{2}$, 其中 $t = \frac{\sqrt{2}}{n}$.

由 $\begin{cases} x = ty + \sqrt{2}, \\ x^2 + 2y^2 = 4, \end{cases}$ 得 $(t^2 + 2)y^2 + 2\sqrt{2}ty - 2 = 0$,

故 $y_1 + y_2 = \frac{-2\sqrt{2}t}{t^2 + 2}, y_1 y_2 = \frac{-2}{t^2 + 2}$ 4 分

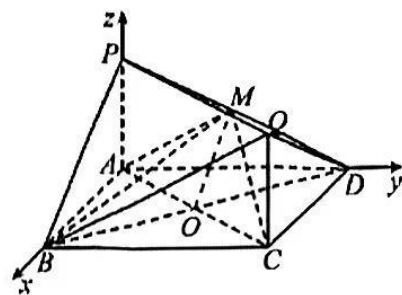
从而 $\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} = \frac{x_1}{y_1} + \frac{x_2}{y_2} = \frac{(ty_1 + \sqrt{2})y_2 + (ty_2 + \sqrt{2})y_1}{y_1 y_2}$

$= 2t + \frac{\sqrt{2}(y_1 + y_2)}{y_1 y_2} = 2t + \frac{-4t}{-2} = 4t = \frac{4\sqrt{2}}{n}$.

因为 $k_3 = k_{ON} = \frac{n}{2\sqrt{2}}$, 所以 $\frac{1}{k_3} = \frac{2\sqrt{2}}{n}$.

从而 $\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} = \frac{2}{k_3}$,

..... 6 分



即 $\frac{k_1+k_2}{k_1k_2} = \frac{2}{k_3}$, 于是 $(k_1+k_2)k_3 = 2k_1k_2$.

由 $(k_1+k_2)k_3 = 1$ 得 $k_1k_2 = \frac{1}{2}$ 8 分

设 $OP: y = k_1x, OQ: y = k_2x$.

由 $\begin{cases} y = k_1x, \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1 \end{cases}$ 得: $(1+2k_1^2)x^2 = 4$, 即 $x_P^2 = \frac{4}{1+2k_1^2}$.

同理可得 $x_Q^2 = \frac{4}{1+2k_2^2}$.

故 $|OP|^2 + |OQ|^2 = (1+k_1^2) \frac{4}{1+2k_1^2} + (1+k_2^2) \frac{4}{1+2k_2^2}$

$= 4 \left(\frac{k_1^2+1}{2k_1^2+1} + \frac{k_2^2+1}{2k_2^2+1} \right)$

$= 4 \left(\frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{2}}{2k_1^2+1} + \frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{2}}{2k_2^2+1} \right)$

$= 4 + 2 \left(\frac{1}{2k_1^2+1} + \frac{1}{2k_2^2+1} \right)$

$= 4 + 2 \left(\frac{2k_1^2+2k_2^2+2}{4k_1^2k_2^2+2k_1^2+2k_2^2+1} \right) = 6$ 12 分

21. (12 分)

解析: (1) 由 $f(x) = (x-1)e^x + ax + 2$, 得 $f'(x) = xe^x + a$,

① 若 $a \geq 0$, 则 $f'(x) > 0$, 此时 $f(x)$ 在区间 $(0, 1)$ 上单调递增, 满足条件;

② 若 $a < 0$, 令 $g(x) = xe^x + a$, 可知 $x > 0$ 时, $g(x)$ 单调递增, 3 分

由于 $f(x)$ 在区间 $(0, 1)$ 上存在单调递增区间, 则 $g(x) > 0$ 即 $a > -xe^x$ 在 $(0, 1)$ 上有解,

由于 $-xe^x$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减, 则 $-e < -xe^x < 0$, 此时 $-e < a < 0$.

综上所述, 若 $f(x)$ 在区间 $(0, 1)$ 上存在单调递增区间, 则 a 的取值范围是 $(-e, +\infty)$

..... 5 分

(2) 令 $h(x) = (x-1)e^x + ax - \sin x - \cos x + 2$, 原不等式即为 $h(x) \geq 0$,

可得 $h(0) = 0, h'(x) = xe^x + a - \cos x + \sin x, h'(0) = a - 1$,

令 $u(x) = h'(x) = xe^x + a - \cos x + \sin x$, 则 $u'(x) = (x+1)e^x + \sin x + \cos x$,

又设 $t(x) = (x+1)e^x$, 则 $t'(x) = (x+2)e^x$, 则 $x \geq 0, t'(x) > 0$, 可知 $t(x)$ 单调递增,

若 $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$, 有 $(x+1)e^x > 0, \sin x + \cos x > 0$, 则 $u'(x) > 0$; 7 分

若 $x \in \left[\frac{\pi}{2}, +\infty\right)$, 有 $(x+1)e^x \geq \left(\frac{\pi}{2} + 1\right)e^{\frac{\pi}{2}} > e$, 则 $u'(x) = (x+1)e^x + \sin x + \cos x > 0$,

所以, $x \geq 0, u'(x) > 0$, 则 $u(x)$ 即 $h'(x)$ 单调递增,

I) 当 $a-1 \geq 0$ 即 $a \geq 1$ 时, $h'(x) \geq h'(0) \geq 0$, 则 $h(x)$ 单调递增,

所以, $h(x) \geq h(0) = 0$ 恒成立, 则 $a \geq 1$ 符合题意. 9 分

II) 当 $a-1 < 0$ 即 $a < 1$ 时,

$h'(0) < 0, h'(2-a) = (2-a)e^{(2-a)} + a - \cos(2-a) + \sin(2-a) \geq 2-a + a - \cos(2-a) + \sin(2-a) > 0$,

存在 $x_0 \in (0, 2-a)$, 使得 $h'(x_0) = 0$,

当 $0 < x < x_0$ 时, $h'(x) < 0$, 则 $h(x)$ 单调递减, 所以 $h(x) < h(0) = 0$, 与题意不符,

综上所述, a 的取值范围是 $[1, +\infty)$ 12 分

22. (10 分)

解析: (1) 由已知, $\left(\frac{x+1}{2}\right)^2 + \left(\frac{y-1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$,

所以 $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 2$, 即 $x^2 + y^2 + 2x - 2y = 0$,

故 C 的普通方程为 $x^2 + y^2 + 2x - 2y = 0$ 3 分

又因为 $x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta$,

所以 C 的极坐标方程为 $\rho^2 + 2\rho \cos \theta - 2\rho \sin \theta = 0$,

即 $\rho = 2 \sin \theta - 2 \cos \theta$ 5 分

(2) 由题意知 $|OA| = 2 \sin \pi - 2 \cos \pi = 2$,

$|OB| = 2 \sin \left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) - 2 \cos \left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = 2 \cos \alpha + 2 \sin \alpha$, 6 分

于是 $S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} |OA| \cdot |OB| \sin \left[\pi - \left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)\right]$

$= (2 \cos \alpha + 2 \sin \alpha) \cos \alpha = 2 \cos^2 \alpha + \sin 2\alpha$

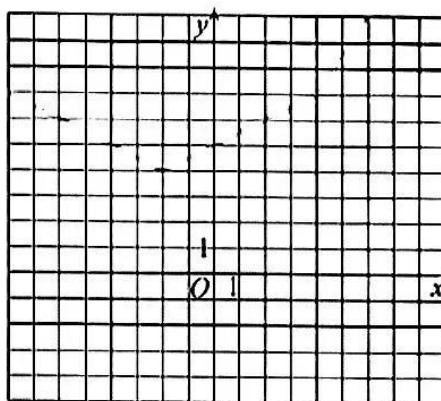
$= \sin 2\alpha + \cos 2\alpha + 1 = \sqrt{2} \sin \left(2\alpha + \frac{\pi}{4}\right) + 1$ 8 分

因为 $0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$, 则 $\frac{\pi}{4} \leq 2\alpha + \frac{\pi}{4} < \frac{5\pi}{4}$,

所以当 $2\alpha + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$, 即当 $\alpha = \frac{\pi}{8}$ 时, $\triangle AOB$ 的面积最大, 且最大值是 $\sqrt{2} + 1$ 10 分

23. (10 分)

解析: (1) 由题, 得 $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x + 3, & x < -2, \\ \frac{1}{2}x + 5, & -2 \leq x \leq 4, \\ \frac{3}{2}x + 1, & x > 4, \end{cases}$ 图象如图所示. 3 分



..... 4 分

由图可知, $f(x) \leq 6$ 的解集为 $\{x | -6 \leq x \leq 2\}$ 5 分

(2) 由(1)知, 函数 $f(x)$ 的最小值为 $T=4$, 则 $a+b=4$ 6 分

只需证明 $\frac{1}{a^2+1} + \frac{1}{b^2+1} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$ 即可.

由已知, $a > 0, b > 0$, 则 $4 = a + b \geq 2\sqrt{ab}$, 所以 $0 < ab \leq 4$ 7分

于是 $\frac{1}{a^2+1} + \frac{1}{b^2+1} \geq \frac{2}{\sqrt{(a^2+1)(b^2+1)}}$, 8分

因为 $(a^2+1)(b^2+1)=a^2b^2+a^2+b^2+1$

$$= a^2 b^2 + (a+b)^2 - 2ab + 1$$

$$= a^2 b^2 - 2ab + 17$$

$$= (ab-1)^2 + 16,$$

由于 $0 < ab \leq 4$, 则 $16 \leq (ab-1)^2 + 16 \leq 25$, 即 $16 \leq (a^2+1)(b^2+1) \leq 25$,

所以 $\frac{1}{a^2+1} + \frac{1}{b^2+1} \geq \frac{2}{\sqrt{(a^2+1)(b^2+1)}} \geq \frac{2}{\sqrt{25}} = \frac{2}{5}$, 当且仅当 $a=b=2$ 时, 等号成立.

..... 10 分