

泸州市高 2020 级第三次教学质量诊断性考试
数 学(理科)

本试卷分第 I 卷(选择题)和第 II 卷(非选择题)两部分,第 I 卷 1 至 2 页,第 II 卷 3 至 4 页,共 150 分,考试时间 120 分钟。

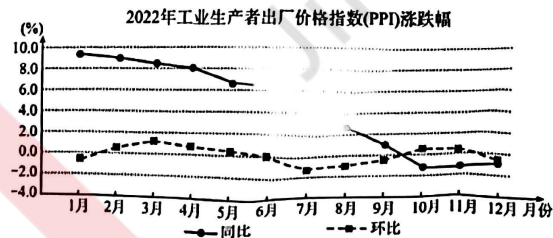
注意事项:

1. 答题前,先将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上,并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置。
2. 选择题的作答:每小题选出答案后,用 2B 铅笔把答题卡上对应题的答案标号涂黑。
3. 填空题和解答题的作答:用签字笔直接答在答题卡上对应的答题区域内,作图题可先用铅笔绘出,确认后再用 0.5 毫米黑色签字笔描清楚,写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
4. 考试结束后,将本试题卷和答题卡一并上交。

第 I 卷 (选择题 共 60 分)

一、选择题:本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{x | x^2 - x - 6 \leq 0\}$, $B = \{x | -4 \leq x \leq a\}$, 且 $A \cup B = \{x | -4 \leq x \leq 3\}$, 则实数 a 的取值范围是
A. $(-4, -2]$ B. $(-3, -2]$ C. $[-3, 3]$ D. $[-2, 3]$
2. 已知向量 a, b 满足 $a \cdot b = -2$, $|b| = 1$, 则 $(a - 2b) \cdot b =$
A. -4 B. -2 C. 0 D. 4
3. 工业生产者出厂价格指数(PPI)反映工业企业产品第一次出售时的出厂价格的变化趋势和变动幅度,对企业的生产发展和国家宏观调控有着重要的影响。下图是我国 2022 年各月 PPI 涨跌幅折线图。(注:下图中,月度同比是将上年同月作为基期相比较的增长率;月度环比是将上月作为基期相比较的增长率)



下列说法中,最贴切的一项为

- A. 2021 年 PPI 逐月减小
- B. 2022 年 PPI 逐月减小
- C. 2022 年各月 PPI 同比涨跌幅的方差小于环比涨跌幅的方差
- D. 2022 年上半年各月 PPI 同比涨跌幅的方差小于下半年各月 PPI 同比涨跌幅的方差

4. 执行右图所示的程序框图,若输入 N 的值为 8,则输出 S 的值为

- A. $-\sqrt{2}$
B. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$
C. 0
D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

5. 将 4 名成都大运会志愿者分配到三个场馆,每名志愿者只分配到 1 个场馆,每个场馆至少分配 1 名志愿者,则不同的分配方案共有

- A. 6 种
B. 24 种
C. 36 种
D. 48 种

6. 函数 $f(x) = \frac{x^4}{e^{1+x} + e^{1-x}}$ 的图象大致为



7. 将函数 $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度,所得图象的函数

- A. 在区间 $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ 上单调递减
B. 在区间 $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$ 上单调递减
C. 在区间 $[\pi, 2\pi]$ 上单调递增
D. 在区间 $\left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$ 上单调递增

8. 记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和,已知 $a_1 = -9, a_2 + a_4 = -10$,则 S_n 的最小值为

- A. -25
B. -35
C. -45
D. -55

9. 已知抛物线 $C: y^2 = 8x$ 的焦点为 F ,准线为 l ,过点 F 的直线交 C 于 P, Q 两点, $PH \perp l$ 于 H ,若 $|HF| = |PF|$, O 为坐标原点,则 $\triangle PFH$ 与 $\triangle OFQ$ 的面积之比为

- A. 6
B. 8
C. 12
D. 16

10. 在直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $AB = AC = \sqrt{3}, BC = AA_1 = 2$,点 P 满足 $\overrightarrow{CP} = m\overrightarrow{CB} + \left(\frac{3}{2} - m\right)\overrightarrow{CC_1}$,其中 $m \in \left[0, \frac{3}{2}\right]$,则直线 AP 与平面 BCC_1B_1 所成角的最大值为

- A. $\frac{\pi}{6}$
B. $\frac{\pi}{4}$
C. $\frac{\pi}{3}$
D. $\frac{5\pi}{12}$

11. 已知函数 $y = e^x - ax$ 有两个零点 x_1, x_2 ,函数 $y = \ln x - \frac{1}{a}x$ 有两个零点 x_3, x_4 ,给出下列 4 个

结论:① $x_1 = \ln x_2$;② $x_3 = e^{x_2}$;③ $x_1 = e^{x_3}$;④ $x_1 \cdot x_3 = x_2^2$. 其中所有正确结论的序号是

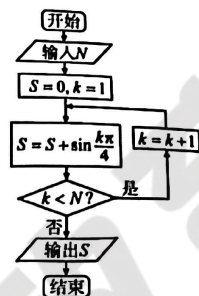
- A. ①②
B. ②③
C. ①②③
D. ①②④

12. 设 O 为坐标原点, F_1, F_2 是双曲线 $H: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点. 过 F_1 作圆 $O:$

$x^2 + y^2 = b^2$ 的一条切线 F_1T ,切点为 T ,线段 F_1T 交 H 于点 M ,若 $\sin \angle F_1MF_2 = \frac{4}{5}$, $\triangle OMT$

的面积为 1,则 H 的方程为

- A. $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{4} = 1$
B. $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = 1$
C. $x^2 - \frac{y^2}{16} = 1$
D. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1$



第Ⅱ卷（非选择题 共90分）

注意事项：

(1)非选择题的答案必须用0.5毫米黑色签字笔直接答在答题卡上，作图题可先用铅笔绘出，确认后再用0.5毫米黑色签字笔描清楚，答在试题卷和草稿纸上无效。

(2)本部分共10个小题，共90分。

二、填空题(本大题共4小题，每小题5分，共20分。把答案填在答题纸上)。

13. 计算： $\frac{7+i}{3+4i} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

14. 已知 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} 2x-3y+6 \geq 0, \\ 2x+y+2 \geq 0, \\ x \leq 1, \end{cases}$ 则 $3x-y$ 的最小值为 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

15. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} = 2a_n + 2, a_1 = 1$, 则 $a_n = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

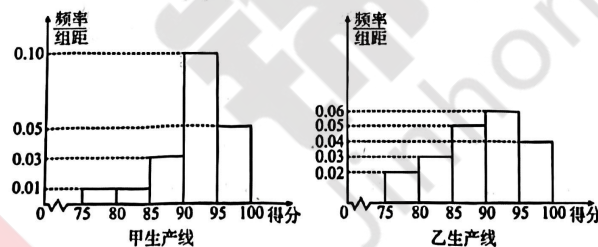
16. 在三棱锥 $P-ABC$ 中, $PA=PC=BA=BC=2$, 平面 $PAC \perp$ 平面 ABC , 则三棱锥 $P-ABC$ 的外接球表面积的最小值为 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

三、解答题：共70分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。第17~21题为必考题，每个试题考生都必须作答。第22、23题为选考题，考生根据要求作答。

(一)必考题：共60分。

17. (本小题满分12分)

某地区为深入贯彻二十大精神，全面推进乡村振兴，进一步优化农产品结构，准备引进一条农产品加工生产线。现对备选的甲、乙两条生产线进行考察，分别在甲、乙两条生产线中各随机抽取了200件产品，并对每件产品进行评分，得分均在 $[75, 100]$ 内，制成如图所示的频率分布直方图，其中得分不低于90产品为“优质品”。



- 求在甲生产线所抽取200件产品的评分的均值(同一区间用区间中点值作代表)；
- 将频率视作概率，用样本估计总体。在甲、乙两条生产线各随机选取2件产品，记“优质品”件数为 ξ ，求 ξ 的分布列和数学期望。

18. (本小题满分12分)

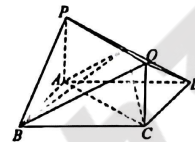
在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c 。已知 $\sin A : \sin B : \sin C = 1 : \sqrt{2} : 2, b=2$ 。

- 求 c 的值；
- 求 $\cos A$ 的值；
- 求 $\sin(2A - \frac{\pi}{3})$ 的值。

19. (本小题满分 12 分)

如图,正方形 $ABCD$ 的边长为 4, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, $CQ \perp$ 平面 $ABCD$, $PA=CQ=2$, M 为棱 PD 上一点.

- (1) 是否存在点 M , 使得直线 $AM \parallel$ 平面 BPQ ? 若存在, 请指出点 M 的位置并说明理由; 若不存在, 请说明理由;
- (2) 当 $\triangle ABM$ 的面积最小时, 求二面角 $B-CM-D$ 的余弦值.



20. (本小题满分 12 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右焦点为 $F(\sqrt{2}, 0)$, 短轴长等于焦距.

- (1) 求 C 的方程;
- (2) 过 F 的直线交 C 于 P, Q , 交直线 $x=2\sqrt{2}$ 于点 N , 记 OP, OQ, ON 的斜率分别为 k_1, k_2, k_3 , 若 $(k_1 + k_2)k_3 = -1$, 求 $|OP|^2 + |OQ|^2$ 的值.

21. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = (x-1)e^x + ax + 2$.

- (1) 若 $f(x)$ 在区间 $(0, 1)$ 上存在单调递增区间, 求 a 的取值范围;
- (2) 若 $x \geq 0, f(x) \geq \sin x + \cos x$, 求 a 的取值范围.

(二) 选考题: 共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答, 如果多做, 则按所做的第一题记分.

22. (本小题满分 10 分) 选修 4-4: 坐标系与参数方程

在平面直角坐标系 xOy 中, 曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = -1 + \sqrt{2} \cos \theta \\ y = 1 + \sqrt{2} \sin \theta \end{cases}$ (θ 为参数). 以坐标原点 O 为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系.

- (1) 写出 C 的极坐标方程;
- (2) 设射线 $l_1: \theta = \pi (\rho \geq 0)$ 和射线 $l_2: \theta = \frac{\pi}{2} + \alpha (\rho \geq 0, 0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2})$ 与 C 分别交于 A, B 两点, 求 $\triangle AOB$ 面积的最大值.

23. (本小题满分 10 分) 选修 4-5: 不等式选讲

已知函数 $f(x) = \left| \frac{1}{2}x - 2 \right| + \left| \frac{1}{2}x + 1 \right| + \frac{1}{2}x + 2$.

- (1) 画出 $f(x)$ 的图象, 并写出 $f(x) \leq 6$ 的解集;
- (2) 令 $f(x)$ 的最小值为 T , 正数 a, b 满足 $a + b = T$, 证明: $\frac{1}{a^2 + 1} + \frac{1}{b^2 + 1} \geq \frac{T}{10}$.

