

泸州市高 2020 级第三次教学质量诊断性考试

数 学(文科)

本试卷分第 I 卷(选择题)和第 II 卷(非选择题)两部分,第 I 卷 1 至 2 页,第 II 卷 3 至 4 页,共 150 分.考试时间 120 分钟.

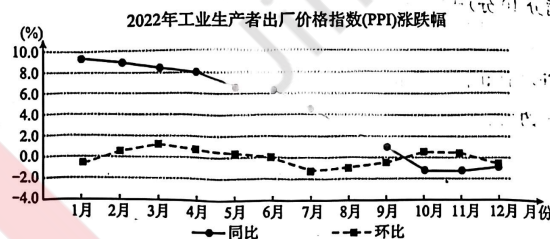
注意事项:

1. 答题前,先将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上,并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置.
2. 选择题的作答:每小题选出答案后,用 2B 铅笔把答题卡上对应题的答案标号涂黑.
3. 填空题和解答题的作答:用签字笔直接答在答题卡上对应的答题区域内,作图题可先用铅笔绘出,确认后再用 0.5 毫米黑色签字笔描清楚,写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效.
4. 考试结束后,将本试题卷和答题卡一并上交.

第 I 卷 (选择题 共 60 分)

一、选择题:本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A = \{x | x^2 - x - 6 \leq 0\}$, $B = \{x | -4 \leq x \leq 1\}$, 则 $A \cap B =$
A. $[-4, -2]$ B. $[-3, -2]$ C. $[-3, 1]$ D. $[-2, 1]$
2. 已知向量 a, b 满足 $a \cdot b = -2$, $|b| = 1$, 则 $(a - 2b) \cdot b =$
A. -4 B. -2 C. 0 D. 4
3. 工业生产者出厂价格指数(PPI)反映工业企业产品第一次出售时的出厂价格的变化趋势和变动幅度,对企业的生产发展和国家宏观调控有着重要的影响.下图是我国 2022 年各月 PPI 涨跌幅折线图.(注:下图中,月度同比是与上年同月作为基期相比较的增长率,月度环比是与上月作为基期相比较的增长率)



下列说法中,最贴切的一项为

- A. 2021 年 PPI 逐月减小
- B. 2022 年 PPI 逐月减小
- C. 2022 年各月 PPI 同比涨跌幅的方差小于环比涨跌幅的方差
- D. 2022 年上半年各月 PPI 同比涨跌幅的方差小于下半年各月 PPI 同比涨跌幅的方差

4. 一个旋转体的正视图如图所示，上面部分是一个直径为 2 的半圆，下面部分是一个下底边长为 4，上底边长和高均为 2 的等腰梯形，则该旋转体的表面积为



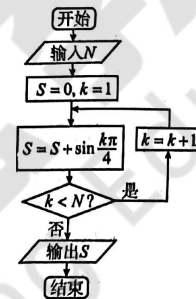
- A. $2\pi + 3\sqrt{5}\pi$ B. $6\pi + 3\sqrt{5}\pi$
C. $7\pi + 3\sqrt{5}\pi$ D. $6\pi + 6\sqrt{5}\pi$
5. 已知 a, b 为实数，则“ $a > 1, b > 1$ ”是“ $\log_a b > 0$ ”的
- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分又不必要条件

6. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} = 2a_n + 2, a_1 = 1$ ，则此数列的通项公式为

- A. $a_n = \begin{cases} 1, & n=1 \\ 3 \times 2^{n-1}, & n \geq 2 \end{cases}$ B. $a_n = \begin{cases} 1, & n=1 \\ 3^n, & n \geq 2 \end{cases}$
C. $a_n = 3 \times 2^{n-1} - 2$ D. $a_n = 3^n - 2$

7. 执行右图所示的程序框图，若输入 N 的值为 8，则输出 S 的值为

- A. $-\sqrt{2}$
B. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$
C. 0
D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$



8. 将函数 $y = \sin(2x + \frac{\pi}{3})$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度，所得图象的函数

- A. 在区间 $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ 上单调递减 B. 在区间 $[\pi, \frac{3\pi}{2}]$ 上单调递减
C. 在区间 $[\pi, 2\pi]$ 上单调递增 D. 在区间 $[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}]$ 上单调递增

9. 已知抛物线 $C: y^2 = 8x$ 的焦点为 F ，准线为 l ，过点 F 的直线交 C 于 P, Q 两点， $PH \perp l$ 于 H ，若 $|HF| = |PF|$ ， O 为坐标原点，则 $\triangle OFH$ 与 $\triangle OFQ$ 的面积之比为

- A. 8 B. 4 C. 3 D. 2

10. 记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，已知 $a_1 = -9, a_2 + a_4 = -10$ ，则 S_n 的最小值为

- A. -25 B. -35 C. -45 D. -55

11. 已知函数 $y = e^x - ax$ 有两个零点 x_1, x_2 ，函数 $y = \ln x - \frac{1}{a}x$ 有两个零点 x_2, x_3 ，给出下列三个

结论：① $x_1 = \ln x_2$ ；② $x_3 = e^{x_2}$ ；③ $x_1 \cdot x_3 = x_2^2$ 。其中所有正确结论的序号是

- A. ①② B. ②③ C. ①③ D. ①②③

12. 设 O 为坐标原点， F_1, F_2 是双曲线 $H: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点。过 F_1 作圆 $O: x^2 + y^2 = b^2$ 的一条切线 F_1T ，切点为 T ，线段 F_1T 交 H 于点 M ，若 $\sin \angle F_1MF_2 = \frac{4}{5}$ ， $\triangle OMT$

的面积为 1，则 H 的方程为

- A. $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{4} = 1$ B. $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = 1$ C. $x^2 - \frac{y^2}{16} = 1$ D. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1$

第 II 卷 (非选择题 共 90 分)

注意事项：

(1)非选择题的答案必须用 0.5 毫米黑色签字笔直接答在答题卡上,作图题可先用铅笔绘出,确认后再用 0.5 毫米黑色签字笔描清楚,答在试题卷和草稿纸上无效.

(2)本部分共 10 个小题,共 90 分.

二、填空题(本大题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.把答案填在答题纸上).

13. 计算: $\frac{2}{1+i} = \underline{\hspace{2cm}}$.

14. 已知 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} 2x-3y+6 \geq 0, \\ 2x+y+2 \geq 0, \\ x \leq 1, \end{cases}$ 则 $3x-y$ 的最小值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

15. 已知函数 $f(x)$ 及其导函数 $f'(x)$ 定义域均为 $\mathbf{R}$, 且 $f(x) + f'(x) > 0$, $f(1) = 2$, 则关于 x 的不等式 $f(x) > 2e^{1-x}$ 的解集为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

16. 在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AB = AA_1 = 2$, 空间中的点 P 满足 $\overrightarrow{CP} = m\overrightarrow{CB} + \left(\frac{3}{2} - m\right)\overrightarrow{CC_1}$, 其中 $m \in \left[0, \frac{3}{2}\right]$. 下列命题中, 真命题有 $\underline{\hspace{2cm}}$ (填所有真命题的序号).

①当 $m=0$ 时, $AP = \sqrt{10}$; ②当 $m = \frac{1}{2}$ 时, 平面 $AA_1P \perp$ 平面 BCC_1B_1 ; ③当 $m=1$ 时, 直线 AP

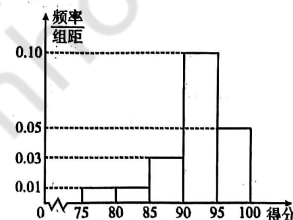
与直线 BC 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$; ④对 $\forall m \in \left[0, \frac{3}{2}\right]$, 三棱锥 $P-ABC_1$ 的体积是定值.

三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤. 第 17~21 题为必考题, 每个试题考生都必须作答. 第 22、23 题为选考题, 考生根据要求作答.

(一) 必考题: 共 60 分.

17. (本小题满分 12 分)

某地区为深入贯彻二十大精神, 全面推进乡村振兴, 进一步优化农产品结构, 准备引进一条农产品加工生产线. 现对某条生产线进行考察, 在该条生产线中随机抽取了 200 件产品, 并对每件产品进行评分, 得分均在 $[75, 100]$ 内, 制成如图所示的频率分布直方图, 其中得分不低于 90 产品为“优质品”.



(1) 求在该生产线所抽取 200 件产品的评分的均值 (同一区间用区间中点值作代表);

(2) 在这 200 件产品的“优质品”中, 采用分层抽样的方法共抽取了 6 件. 若在这 6 件产品中随机抽取 2 件进行质量分析, 求“抽取的两件产品中至少有一件产品的得分在 $[95, 100]$ ”的概率.

18. (本小题满分 12 分)

在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c . 已知 $\sin A + \sin B + \sin C = 1 + \sqrt{2}$, $b = 2$.

(1) 求 c 的值;

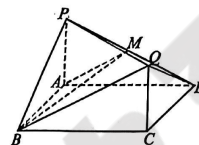
(2) 求 $\cos A$ 的值;

(3) 求 $\sin\left(A - \frac{\pi}{6}\right)$ 的值.

19. (本小题满分 12 分)

如图, 正方形 $ABCD$ 的边长为 4, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, $CQ \perp$ 平面 $ABCD$, $PA=CQ=2$, M 为棱 PD 上一点.

- (1) 是否存在点 M , 使得直线 $AM \parallel$ 平面 BPQ ? 若存在, 请指出点 M 的位置并说明理由; 若不存在, 请说明理由;
- (2) 当 $AM \perp PD$ 时, 求多面体 $PABQM$ 的体积.



20. (本小题满分 12 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右焦点为 $F(\sqrt{2}, 0)$, 并且经过点 $(1, \frac{\sqrt{6}}{2})$.

- (1) 求 C 的方程;
- (2) 过 F 的直线交 C 于 P, Q , 交直线 $x=2\sqrt{2}$ 于点 N , 记 OP, OQ, ON 的斜率分别为 k_1, k_2, k_3 , 探索三个数 $\frac{1}{k_1}, \frac{1}{k_3}, \frac{1}{k_2}$ 是否成等差数列, 并证明你的结论.

21. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = (x-1)e^x + ax + 2$.

- (1) 若 $f(x)$ 单调递增, 求 a 的取值范围;
- (2) 若 $x \geq 0, f(x) \geq \sin x + \cos x$, 求 a 的取值范围.

(二) 选考题: 共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答, 如果多做, 则按所做的第一题记分.

22. (本小题满分 10 分) 选修 4-4: 坐标系与参数方程

在平面直角坐标系 xOy 中, 曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = -1 + \sqrt{2} \cos \theta, \\ y = 1 + \sqrt{2} \sin \theta \end{cases}$ (θ 为参数). 以坐标原点 O 为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系.

- (1) 写出 C 的极坐标方程;
- (2) 设射线 $l_1: \theta = \pi (\rho \geq 0)$ 和射线 $l_2: \theta = \frac{\pi}{2} + \alpha (\rho \geq 0, 0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2})$ 与 C 分别交于 A, B 两点, 求 $\triangle AOB$ 面积的最大值.

23. (本小题满分 10 分) 选修 4-5: 不等式选讲

已知函数 $f(x) = \left| \frac{1}{2}x - 2 \right| + \left| \frac{1}{2}x + 1 \right| + \frac{1}{2}x + 2$.

- (1) 画出 $f(x)$ 的图象, 并写出 $f(x) \leq 6$ 的解集;
- (2) 令 $f(x)$ 的最小值为 T , 正数 a, b 满足 $a+b=T$, 证明: $\frac{1}{a^2+1} + \frac{1}{b^2+1} \geq \frac{T}{10}$.

