

宜宾市 2020 级高三第三次诊断性试题

数 学 (理工类) 参考答案

一、选择题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	C	B	B	C	D	D	A	C	A	B	D	C

10. 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = 2x^3 - 3x^2$, $f'(x) = 6x^2 - 6x = 6x(x-1)$, 令 $f'(x) = 0$, $x = 1$,

$f(x)$ 在上单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, $f(x)_{\min} = f(1) = -1$,

$\therefore y = f(x)$ 的最小值为 -1 , $\therefore$ 当 $x < 0$ 时, $f(x)_{\min} \geq -1$.

当 $x < 0$ 时, $f(x) = (x-m)^2 - 2$.

①若 $m \geq 0$, $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, $f(x) > f(0) = m^2 - 2$, $m^2 - 2 \geq -1$, $m \geq 1$.

②若 $m < 0$, $f(x)$ 在 $(-\infty, m)$ 上单调递减, 在 $(m, 0)$ 上单调递增, $f(x)_{\min} = f(m) = -2$, 舍去.

综上 $m \geq 1$.

11. 不妨设 $DA = 2, DH = 1$, 则 $DK = DJ = 1, HK = KJ = JH = \sqrt{2}$,

过点 D 作 $DO \perp$ 面 HKJ , 在 $Rt\triangle DOH$ 中, $\therefore HO = \frac{\sqrt{6}}{3}, DH = 1, \therefore DO = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$V_{D-HKJ} = \frac{1}{3} S_{HKJ} \cdot DO = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times (\sqrt{2})^2 \times \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{6} \cdot V_{\text{正立方体}} = S \cdot EG = 2 \times 2 \times 2 = 8,$

$\frac{V_{D-HKJ}}{V_{\text{正立方体}}} = \frac{EF \cdot S}{EG \cdot S} = \frac{EF}{EG}, \frac{V_{D-HKJ}}{V_{\text{正立方体}}} = \frac{\frac{1}{6}}{8} = \frac{1}{48}, \frac{EF}{EG} = \frac{1}{48}.$

12. $\frac{a}{c} = \frac{\cos A}{2 - \cos C}, \frac{\sin A}{\sin C} = \frac{\cos A}{2 - \cos C}, 2 \sin A - \sin A \cos C = \cos A \sin C, 2 \sin A = \sin A \cos C + \cos A \sin C, 2 \sin A = \sin(A+C), 2 \sin A = \sin B, b = 2a.$

设 $A(0,0), B(2,0), C(x,y), \therefore b = 2a, \therefore |AC| = 2|BC|, \sqrt{x^2 + y^2} = 2\sqrt{(x-2)^2 + y^2},$

$(x - \frac{8}{3})^2 + y^2 = \frac{16}{9}$, 点 C 的轨迹是以 $(\frac{8}{3}, 0)$ 为圆心, 半径为 $\frac{4}{3}$ 的圆.

过 C 作 $CD \perp AB$, 当 CD 最大时, $S_{\triangle ABC}$ 有最大值, $(S_{\triangle ABC})_{\max} = \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{4}{3} = \frac{4}{3}$

二、填空题

13. 150; 14. 0; 15. $\frac{1 + \ln 2}{2}$; 16. 18.

15. $f(x_1) = g(x_2), \ln x_1 = 2x_2, x_2 = \frac{\ln x_1}{2}, x_1 - x_2 = x_1 - \frac{\ln x_1}{2},$

令 $h(x) = x - \frac{\ln x}{2}, h'(x) = 1 - \frac{1}{2x} = \frac{2x-1}{2x}$, 令 $h'(x) = 0, x = \frac{1}{2},$

$h(x)$ 在 $(0, \frac{1}{2})$ 上单调递减, 在 $(\frac{1}{2}, +\infty)$ 单调递增. $h(x)_{\min} = h(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} - \frac{\ln \frac{1}{2}}{2} = \frac{1 + \ln 2}{2}.$

16. 因为 $e = \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2} = 1 + \frac{b^2}{a^2} = \frac{4}{3}$

所以 $\frac{b^2}{a^2} = \frac{1}{3}$, 渐近线 $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$

不妨设 $a = \sqrt{3}m, b = m, c = 2m$, 双曲线的方程 $\frac{x^2}{3m^2} - \frac{y^2}{m^2} = 1, A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$

$$\text{所以 } AB: x = 2m - \frac{y}{\sqrt{3}}$$

$$\text{联立 } \begin{cases} \frac{x^2}{3m^2} - \frac{y^2}{m^2} = 1 \\ y = -\sqrt{3}(x - 2m) \end{cases} \text{ 得 } 8y^2 + 4\sqrt{3}my - 3m^2 = 0$$

$$y_1 = \frac{3m - \sqrt{3}m}{4}, y_2 = \frac{-3m - \sqrt{3}m}{4}$$

$$\text{所以 } \frac{AF_2}{BF_2} = \frac{|y_1|}{|y_2|} = \frac{3 - \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}}$$

$$BF_2 = \frac{3 + \sqrt{3}}{2}, AB = AF_2 + BF_2 = 3 = \sqrt{1 + \frac{1}{3}}|y_1 - y_2| = \sqrt{1 + \frac{1}{3}} \frac{3m}{2} = 3$$

$$m = \sqrt{3}$$

$$\text{所以 } a = 3$$

$$AF_1 + BF_1 + AB = 2(AF_2 + BF_2) + 4a = 18$$

三、解答题

17.(1) 选①

$$\therefore \frac{\sin A}{1 - \cos A} = \frac{\sin 2B}{1 + \cos 2B},$$

$$\therefore \frac{\sin A}{1 - \cos A} = \frac{\sin B \cos B}{\cos^2 B}, \frac{\sin A}{1 - \cos A} = \frac{\sin B}{\cos B},$$

$$\sin A \cos B = \sin B - \cos A \sin B, \sin(A + B) = \sin B, \sin C = \sin B, B = C. \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

选②

$$\therefore \sin C \sin(B - A) = \sin B \sin(C - A),$$

$$\therefore \sin C(\sin B \cos A - \cos B \sin A) = \sin B(\sin C \cos A - \cos C \sin A)$$

$$\sin C \sin B \cos A - \sin C \cos B \sin A = \sin B \sin C \cos A - \sin B \cos C \sin A$$

$$-\sin C \cos B \sin A = -\sin B \cos C \sin A$$

$$\sin C \cos B = \sin B \cos C$$

$$\sin C \cos B - \sin B \cos C = 0$$

$$\sin(C - B) = 0$$

$$\therefore B = C. \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$\begin{aligned} (2) \frac{2a+b}{c} + \frac{1}{\cos B} &= \frac{2\sin A + \sin B}{\sin C} + \frac{1}{\cos B} \\ &= \frac{2\sin(B+C) + \sin B}{\sin C} + \frac{1}{\cos B} = \frac{2\sin(2B) + \sin B}{\sin B} + \frac{1}{\cos B} \\ &= \frac{4\sin B \cos B + \sin B}{\sin B} + \frac{1}{\cos B} \\ &= 4\cos B + \frac{1}{\cos B} + 1 \dots\dots\dots 10 \text{ 分} \end{aligned}$$

$$\geq 2\sqrt{4} + 1 = 5, \text{ 当且仅当 } 4\cos B = \frac{1}{\cos B} \text{ 时,}$$

$$\text{即 } \cos B = \frac{1}{2} \text{ 时, 等号成立.} \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

$$18.(1) \bar{x} = \frac{100}{10} = 10, \bar{y} = \frac{600}{10} = 60,$$

$$\sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \sum_{i=1}^{10} x_i y_i - 10\bar{x}\bar{y} = 8264 - 10 \times 10 \times 60 = 2264, \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$\sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{10} x_i^2 - 10\bar{x}^2 = 1400 - 10 \times 10 \times 10 = 400,$$

$$\sum_{i=1}^{10} (y_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^{10} y_i^2 - 10\bar{y}^2 = 49200 - 10 \times 60^2 = 13200,$$

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}} = \frac{2264}{\sqrt{400 \times 13200}} = \frac{2264}{400 \times \sqrt{33}} \approx \frac{2264}{2298} \approx 0.99, \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

故两个变量线性相关程度较高.

(2) 设该地芯片企业的总营业收入的估计值为 m , $\frac{100}{600} = \frac{268}{m}$, $m = 1608$. $\dots\dots\dots 12 \text{ 分}$

19.(1) 作 DE 中点 O , 连接 AO ,

$\because$ 平面 $EFG \parallel$ 平面 ABD , 平面 $EFG \cap$ 平面 $ABC = FG$, 平面 $ABD \cap$ 平面 $ABC = AB$

$\therefore AB \parallel FG$ 全科试题免费下载公众号《高中僧课堂》

同理 $BD \parallel EF$, $\because DE \perp \frac{1}{2}BC$, $\therefore F$ 为 BC 中点, $\therefore G$ 为 AC 的中点,

$\therefore GE \perp AC$, $OF \perp BC$, $\dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

$\therefore AO \perp$ 平面 $BCED$, $\therefore AO \perp BC$

$\because AO \cap FO = O$, $\therefore BC \perp$ 平面 AOF , $\therefore BC \perp AF$, $\therefore GF = GA = \frac{1}{2}AC$,

$FC = EC$, GE 是公共边, $\therefore \triangle GEA \cong \triangle GEF$, $\therefore \angle FGE = \angle AGE = 90^\circ$ $\dots\dots\dots 5 \text{ 分}$

, 又 $AC \cap GF = G$, $\therefore EG \perp$ 面 ABC $\dots\dots\dots 6 \text{ 分}$

(2) 由 (1) 知 F, G 分别为 BC, AC 中点, $\therefore$ 面 $ADE \perp$ 面 $BCED$,

连接 OF , $AO \perp DE \therefore AO \perp$ 面 $BCDE$ 建立如图所示空间直角坐标系 $o-xyz$

令 $BC = 4a$, 则 $O(0, 0, 0)$ $A(0, 0, \sqrt{3}a)$ $B(\sqrt{3}a, -2a, 0)$ $C(\sqrt{3}a, 2a, 0)$ $D(0, -a, 0)$

$E(0, a, 0)$ $F(\sqrt{3}a, 0, 0)$ $G(\frac{\sqrt{3}a}{2}, a, \frac{\sqrt{3}a}{2})$

设 $\frac{AH}{AD} = \lambda$, $H(x, y, z)$, $(x, y, z - \sqrt{3}a) = \lambda(0, -a, -\sqrt{3}a)$,

$$\therefore \begin{cases} x = 0 \\ y = -\lambda a \\ z = \sqrt{3}a(1 - \lambda) \end{cases} \therefore H(0, -\lambda a, \sqrt{3}a(1 - \lambda)) \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

设面 EFG 的法向量 $\vec{n} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{EF} = (\sqrt{3}a, -a, 0)$ $\vec{EG} = (\frac{\sqrt{3}a}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}a}{2})$

$$\begin{cases} \sqrt{3}ax_1 - ay_1 = 0 \\ \frac{\sqrt{3}a}{2}x_1 + \frac{\sqrt{3}a}{2}y_1 = 0 \end{cases} \therefore \vec{n} = (1, \sqrt{3}, 1), \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

$\vec{FH} = (-\sqrt{3}a, -\lambda a, \sqrt{3}a(1 - \lambda))$

$$\therefore \frac{\sqrt{15}}{5} = \left| \frac{-\sqrt{3}a - \sqrt{3}a\lambda - \sqrt{3}a(1 - \lambda)}{\sqrt{5}\sqrt{3a^2 + \lambda^2 a^2 + 3a(1 - \lambda)^2}} \right| \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2} \text{ 或 } 1 \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

20. 解: (1) 设点 $A(x, y)$, $x > 0$,

$$\because AB, AC \text{ 的斜率之积是 } 3 \therefore \frac{y}{x+1} \cdot \frac{y}{x-1} = 3 (x \neq 1). \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\therefore \text{点 } A \text{ 的轨迹 } D \text{ 的方程为 } x^2 - \frac{y^2}{3} = 1 (x > 1) \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$(2) \text{ 由 } \begin{cases} x^2 = 2py \\ x^2 - \frac{y^2}{3} = 1 (x > 1) \end{cases}$$

$$\text{得 } y^2 - 6py + 3 = 0, \Delta = 36p^2 - 12 > 0, p > \frac{\sqrt{3}}{3}$$

设 $E(x_1, y_1), F(x_2, y_2)$, 则 $y_1 + y_2 = 6p, y_1 y_2 = 3$, 6 分

$$\therefore x_1^2 = 2py_1, x_2^2 = 2py_2, \therefore x_1 x_2 = \sqrt{2py_1} \cdot \sqrt{2py_2} = 2\sqrt{3}p,$$

$$\therefore k_{EF} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{x_1^2 - x_2^2}{2p(x_1 - x_2)} = \frac{x_1 + x_2}{2p},$$

$$\therefore \text{直线 } EF \text{ 的方程为 } y - y_1 = \frac{x_1 + x_2}{2p}(x - x_1),$$

$$\text{即 } y = \frac{x_1 + x_2}{2p}x - \frac{x_1 + x_2}{2p}x_1 + y_1 = \frac{x_1 + x_2}{2p}x - \frac{x_1 x_2}{2p} = \frac{x_1 + x_2}{2p}x - \sqrt{3},$$

$\therefore$ 直线 EF 过定点 $P(0, -\sqrt{3})$, 10 分

$$\text{当 } G \text{ 为 } BP \text{ 的中点时, } \therefore BH \perp EF \text{ 于 } H, \therefore |GH| = \frac{1}{2}|BP| = 1$$

$\therefore$ 存在定点 $G(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$, 使 $|HG|$ 为常数 12 分

21.

法一: 函数 $f(x)$ 的定义域是 $(0, +\infty)$.

$$f'(x) = m(e^{-x} - xe^{-x}) + 1 - \frac{1}{x} = \frac{1}{e^x}(x-1)(\frac{e^x}{x} - m)$$

$$\text{令 } u(x) = \frac{e^x}{x} - m, u'(x) = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$$

所以 $u(x)$ 在 $(0, 1)$ 单减, $(1, +\infty)$ 单增

$$u_{\min} = u(1) = e - m$$

① $m \leq e$ 时, $u_{\min} \geq 0, u(x) \geq 0$

此时, $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 单减, $(1, +\infty)$ 单增, 有 1 个极小值点 2 分

② $m > e$ 时, $u_{\min} < 0$

当 $x < \frac{1}{m-1} < 1$ 时, $u(x) > \frac{x+1}{x} - m = 1 + \frac{1}{x} - m > 0$, 此时 $\exists x_1 \in (0, 1)$, 使得 $u(x_1) = 0$

当 $x > m > e$ 时, $u(x) > \frac{x^2}{x} - m = x - m > 0$, 此时 $\exists x_2 \in (1, +\infty)$, 使得 $u(x_2) = 0$

所以 $f(x)$ 在 $(0, x_1)$ 单减, $(x_1, 1)$ 单增, $(1, x_2)$ 单减, $(x_2, +\infty)$ 单增

$f(x)$ 有 3 个极值点 5 分

(2) 由 (1) 得

① 当 $0 < m \leq e$ 时, $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 单减, $(1, +\infty)$ 单增

$$f_{\min} = f(1) = \frac{m}{e} + 1 = 1 + \ln m$$

$$\text{所以 } \frac{1}{e} = \frac{\ln m}{m}$$

令 $g(x) = \frac{\ln x}{x}$, 在 $(0, e)$ 单增, $(e, +\infty)$ 单减

$$g_{\max} = g(e) = \frac{1}{e}$$

所以 $m = e$; 7 分

② 当 $m > e$ 时, $\exists x_1 \in (0, 1)$, 使得 $u(x_1) = 0$, $\exists x_2 \in (1, +\infty)$, 使得 $u(x_2) = 0$

所以 $f(x)$ 在 $(0, x_1)$ 单减, $(x_1, 1)$ 单增, $(1, x_2)$ 单减, $(x_2, +\infty)$ 单增,

其中 $\frac{e^{x_i}}{x_i} - m = 0 (i = 1, 2) \Leftrightarrow x_i = \ln m + \ln x_i$ 9 分

$$\text{所以 } f_{\min} = \min\{f(x_1), f(x_2)\} = 1 + \ln m$$

$$\text{而 } f(x_i) = \frac{mx_i}{e^{x_i}} + x_i - \ln x_i = 1 + \ln m \text{ 符合要求}$$

所以 $m > e$

综上 $m \geq e$ 12 分

法二：(1) 函数 $f(x)$ 的定义域是 $(0, +\infty)$.

$$f'(x) = me^{-x}(1-x) + 1 - \frac{1}{x} = \frac{(x-1)(1-mxe^{-x})}{x}.$$

记 $u(x) = 1 - mxe^{-x}, v(x) = xe^{-x}$.

$v'(x) = \frac{1-x}{e^x}$ 可知 $v(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增, $(1, +\infty)$ 上单调递减, 所以 $v_{\max} = v(1) = \frac{1}{e}$.

① $m \leq 0$. 则 $u(x) \geq 1 > 0, f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减, $(1, +\infty)$ 上单调递增, 恰有 $x = 1$ 一个极值点.

② $0 < m \leq e$. 则 $u(x) \geq 1 - \frac{m}{e} \geq 0$. 所以 $f(x)$ 恰有 $x = 1$ 一个极值点. 2 分

③ $m > e$. 因为 $u(0) > 0, u(1) < 0, u(m) > 0$, 所以存在 $x_1 \in (0, 1), x_2 \in (1, m)$ 使得 $u(x_1) = u(x_2) = 0$. $f(x)$ 在 $(0, x_1), (x_1, 1)$ 上单调递增, $(x_1, 1), (x_2, +\infty)$ 上单调递减. 所以 $f(x)$ 恰有三个极值点. 5 分

综上, $m \leq e$ 时, $f(x)$ 恰有一个极值点; $m > e$ 时, $f(x)$ 恰有三个极值点.

(2) 先证明: $f(x) \geq 1 + \ln m$.

这等价于证明:

$$x - \ln x - \ln m \geq 1 - mxe^{-x}.$$

即

$$\ln \frac{e^x}{xm} \geq 1 - \frac{xm}{e^x}. \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

令 $g(t) = \ln t - 1 + \frac{1}{t}$, 则 $g'(t) = \frac{t-1}{t^2}$ 可知 $g(t)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减, $(1, +\infty)$ 上单调递增,

所以 $g(t) \geq g(1) = 0$. 所以 $\ln t \geq 1 - \frac{1}{t}$. 在这里令 $t = \frac{e^x}{mx}$, 就有

$$\ln \frac{e^x}{mx} \geq 1 - \frac{xm}{e^x}. \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

因此, 要使 $1 + \ln m$ 是 $f(x)$ 在 $(0, 1]$ 上的最小值, 只需要上式可以取得等号. 即: $t = \frac{e^x}{mx} = 1$ 能成立,

$$0 < m = \frac{e^x}{x} = \frac{1}{v(x)}$$

有解. 利用 (1) 中对 $v(x)$ 的讨论, 可知 $m \geq e$ 即可. 12 分

所以, m 的所有可能值是 $[e, +\infty)$ 上的实数.

22. (1) 由 $\begin{cases} x = \sqrt{2} + \cos\theta \\ y = \sin\theta \end{cases}$ 得 $(x - \sqrt{2})^2 + y^2 = 1, \therefore x^2 + y^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = 0$ 2 分

$\therefore$ 圆 C 的极坐标方程为 $\rho^2 - 2\sqrt{2}\cos\theta\rho + 1 = 0$ 5 分

(2) $\theta = \beta$ 代入 $\rho^2 - 2\sqrt{2}\rho\cos\beta + 1 = 0, \therefore \rho_1 + \rho_2 = 2\sqrt{2}\cos\beta$

$\therefore |OA| + |OB| = 2\sqrt{2}\cos\beta$ 7 分

同理, $|OC| + |OD| = 2\sqrt{2}\cos(\beta + \frac{\pi}{4})$ 8 分

$$\therefore \frac{|OC| + |OD|}{|OA| + |OB|} = \frac{2\sqrt{2}\cos(\beta + \frac{\pi}{4})}{2\sqrt{2}\cos\beta} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\tan\beta \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

$\therefore -\frac{\pi}{4} < \beta < 0, \therefore \tan\beta \in (-1, 0)$

$\therefore \frac{|OC| + |OD|}{|OA| + |OB|}$ 的取值范围是 $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2})$ 10 分

23. (1) $f(x) = 2|x + a| - 2|x - b| \leq 2|(x + a) - (x - b)| = 2|a + b|$, 2 分

当 $x = b$ 时取等号, $\therefore a > 0, b > 0, \therefore |a + b| = a + b, \therefore$ 由题可知 $2(a + b) = 2, \therefore a + b = 1$ 5 分

(2) $(\frac{1}{a} + \frac{4}{b})(a + b) = 5 + \frac{b}{a} + \frac{4a}{b} \geq 5 + 2\sqrt{\frac{b}{a} \cdot \frac{4a}{b}} = 9 (a > 0, b > 0)$ 7 分

$\frac{4}{(3a + 1)b} = \frac{12}{(3a + 1)3b} \geq 12(\frac{2}{3a + 3b + 1})^2 = 3,$ 9 分

$\therefore \frac{1}{a} + \frac{4}{b} + \frac{4}{(3a + 1)b} \geq 12,$ 10 分



锦宏教育
Jinhong Education