

宜宾市普通高中 2020 级高考适应性考试

数学(理工类)

注意事项：

1. 答卷前,考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上.
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑.如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其它答案标号. 回答非选择题时,将答案写在答题卡上,写在本试卷上无效.
3. 本试卷满分 150 分,考试时间 120 分钟. 考试结束后,请将答题卡交回.

一、选择题:本大题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 设集合 $P = \{x | 0 < \log_2 x < 1\}$, $Q = \{x | x \leq 2\}$, 则

- A. $P \cap Q = \emptyset$ B. $P \cup Q = \mathbf{R}$ C. $P \subseteq Q$ D. $Q \subseteq P$

2. 已知复数 $z = 3 + 4i$, 且 $z + a\bar{z} + bi = 9$, 其中 a, b 是实数, 则

- A. $a = -2, b = 3$ B. $a = 2, b = 4$ C. $a = 1, b = 2$ D. $a = 2, b = -4$

3. 已知数列 $\{\frac{1}{2n-11}\}$ 的前 n 项和为 S_n , 则使得 S_n 最小时的 n 是

- A. 4 B. 5 C. 6 D. 7

4. 已知 $p: 1 < m < 3, q: \frac{x^2}{m-1} + \frac{y^2}{3-m} = 1$ 表示椭圆, 则 p 是 q 的

- A. 充要条件 B. 充分不必要条件
C. 必要不充分条件 D. 既不充分也不必要条件

5. 已知两个平面 α, β , 两条直线 l, m , 则下列命题正确的是

- A. 若 $\alpha \perp \beta, l \subset \alpha$, 则 $l \perp \beta$
B. 若 $l \subset \alpha, m \subset \beta, m \perp l$, 则 $\alpha \perp \beta$
C. 若 $l \subset \alpha, m \subset \alpha, m // \beta, l // \beta$, 则 $\alpha // \beta$
D. 若 l, m 是异面直线, $l \subset \alpha, l // \beta, m \subset \beta, m // \alpha$, 则 $\alpha // \beta$

6. 在黑板上从左到右写 2, 0, 2, 3 四个数, 对两个相邻的数, 每次用右边的数减左边的数的差填在这两数中间, 从 3 开始到最左边的 2 为止, 称为填一次. 比如填第一次: 2, -2, 0, 2, 2, 1, 3, 其中划线部分是填的右边的数减左边的数的差. 则这样填 2023 次之后, 黑板上所有数的和是

- A. 2023 B. 2025 C. 2028 D. 2030

7. 已知函数 $f(x) = x^2 + a \ln x$ 在区间 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 则实数 a 的取值范围是

- A. $a \geq -2$ B. $a < -2$ C. $a \geq 0$ D. $a < 0$

8. 同时抛掷两枚质地均匀的骰子一次, 事件甲表示“第一枚骰子向上的点数为奇数”, 事件乙表示“第二枚骰子向上的点数为偶数”, 事件丙表示“两枚骰子向上的点数之和为6”, 事件丁表示“两枚骰子向上的点数之和为7”, 则

A. 事件甲与事件乙互斥

$$B. P(\text{丙}|\text{乙}) = \frac{5}{72}$$

C. 事件甲与事件丁相互独立

D. 事件丙与事件丁互为对立事件

9. 已知点 M 是圆 $C: (x-4)^2 + y^2 = 4$ 上的一个动点, 点 N 是直线 $y = x$ 上除原点 O 外的任意一点, 则向量 $\overrightarrow{OM}$ 在向量 $\overrightarrow{ON}$ 上的投影的最大值是

A. $2\sqrt{2} + 2$

B. $2\sqrt{2}$

C. $3\sqrt{2} + 2$

D. $3\sqrt{2}$

10. 若函数 $f(x) = \begin{cases} (x-m)^2 - 2, & x < 0 \\ 2x^3 - 3x^2, & x \geq 0 \end{cases}$ 的最小值是 -1 , 则实数 m 的取值范围是

A. $m \leq 0$

B. $m \geq 1$

C. $m \geq \sqrt{3}$

D. $m > 0$

11. 如图1, 水平放置的正方体容器中注入了一定量的水, 现将该正方体容器的一个顶点固定在地面上, 使得 DA, DB, DC 三条棱与地面所成角均相等, 此时水平面为 HJK , 如图2所示. 若在图2中 $\frac{DH}{DA} = \frac{1}{2}$, 则在图1中 $\frac{EF}{EG} =$

A. $\frac{4}{27}$

B. $\frac{1}{16}$

C. $\frac{1}{12}$

D. $\frac{1}{48}$

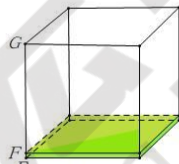


图1

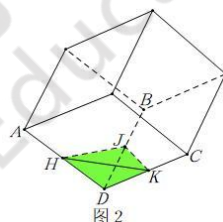


图2

12. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对边分别记为 a, b, c , 若 $\frac{a}{c} = \frac{\cos A}{2 - \cos C}$, $c = 2$, 则 $\triangle ABC$ 面积的最大值是

A. $\sqrt{2}$

B. 2

C. $\frac{4}{3}$

D. $\frac{2}{3}$

二、填空题: 本大题共4个小题, 每小题5分, 共20分.

13. 某学校共1000人参加数学测验, 考试成绩 ξ 近似服从正态分布 $N(110, \sigma^2)$, 若 $P(110 \leq \xi \leq 130) = 0.35$, 则估计成绩不及格(在90分以下)的学生人数为_____.

14. 音乐是由不同频率的声音组成的. 若音1(do)的音阶频率为 f , 则简谱中七个音1(do), 2(re), 3(mi), 4(fa), 5(so), 6(la), 7(si)组成的音阶频率分别是 $f, \frac{9}{8}f, \frac{81}{64}f, \frac{4}{3}f, \frac{3}{2}f, \frac{27}{16}f, \frac{243}{128}f$, 其中后一个音阶频率与前一个音阶频率的比是相邻两个音的台阶. 上述七个音的台阶只有两个不同的值, 记为 $\alpha, \beta (\alpha > \beta)$, α 称为全音, β 称为半音, 则 $\lg \alpha^5 + \lg \beta^2 - \lg 2 =$ _____.

15. 已知函数 $f(x) = \ln x$, $g(x) = 2x$, 若 $f(x_1) = g(x_2)$, 则 $|x_1 - x_2|$ 的最小值是_____.

16. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左, 右焦点分别为 F_1, F_2 , 离心率为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$, 过 F_2 作渐近线 $y = \frac{b}{a}x$ 的垂线交 C 于 A, B 两点, 点 A 在第一象限, 若 $|AF_2| = \frac{3 - \sqrt{3}}{2}$, 则 $\triangle ABF_1$ 的周长为_____.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

(一) 必做题：共 60 分。

17. (12 分)

在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 所对边分别记为 a, b, c 。

条件①： $\frac{\sin A}{1 - \cos A} = \frac{\sin 2B}{1 + \cos 2B}$ ；条件②： $\sin C \sin(B - A) = \sin B \sin(C - A)$ 。

从条件①、条件②这两个条件中选择一个作为已知。

(1) 证明： $B = C$ ；

(2) 求 $\frac{2a+b}{c} + \frac{1}{\cos B}$ 的最小值。

18. (12 分)

近几年，在缺“芯”困局之下，国产替代的呼声愈发高涨，在国家的政策扶持下，国产芯片厂商呈爆发式增长。为估计某地芯片企业的营业收入，随机选取了 10 家芯片企业，统计了每家企业的研发投入（单位：亿）和营业收入（单位：亿），得到如下数据：

样本号 i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
研发投入 x_i	2	2	4	6	8	10	14	16	18	20
营业收入 y_i	14	16	30	38	50	60	70	90	102	130

并计算得 $\sum_{i=1}^{10} x_i = 100$, $\sum_{i=1}^{10} y_i = 600$, $\sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 1400$, $\sum_{i=1}^{10} y_i^2 = 49200$, $\sum_{i=1}^{10} x_i y_i = 8264$ 。

(1) 求该地芯片企业的研发投入与营业收入的样本相关系数 r ，并判断这两个变量的相关性强弱（若 $0.30 \leq |r| < 0.75$ ，则线性相关程度一般，若 $|r| \geq 0.75$ ，则线性相关程度较高， r 精确到 0.01）；全科试题免费下载公众号《高中僧课堂》

(2) 现统计了该地所有芯片企业的研发投入，并得到所有芯片企业的研发投入总和为 268 亿，已知芯片企业的研发投入与营业收入近似成正比。利用以上数据给出该地芯片企业的总营业收入的估计值。

$$\text{附：相关系数 } r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}, \sqrt{33} \approx 5.745.$$

19. (12 分)

如图 (1)，在正三角形 ABC 中， D, E 分别为 AB, AC 中点，将 $\triangle ADE$ 沿 DE 折起，使二面角 $A - DE - B$ 为直二面角，如图 (2)，连接 AB, AC ，过点 E 作平面 EFG 与平面 ABD 平行，分别交 BC, AC 于 F, G 。

(1) 证明： $EG \perp$ 平面 ABC ；

(2) 点 H 在线段 AD 上运动，当 FH 与平面 EFG 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{15}}{5}$ 时，求 $\frac{AH}{AD}$ 的值.

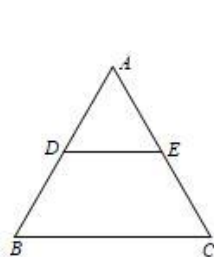


图 (1)

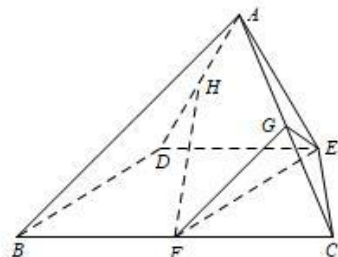


图 (2)

20. (12 分)

已知点 A 在 y 轴右侧，点 B ，点 C 的坐标分别为 $(-1, 0)$ ， $(1, 0)$ ，直线 AB ， AC 的斜率之积是 3.

(1) 求点 A 的轨迹 D 的方程；

(2) 若抛物线 $x^2 = 2py$ ($p > 0$) 与点 A 的轨迹 D 交于 E ， F 两点，过 B 作 $BH \perp EF$ 于 H ，是否存在定点 G 使 $|HG|$ 为常数？若存在，求出 G 的坐标；若不存在，请说明理由.

21. (12 分)

已知函数 $f(x) = mxe^{-x} + x - \ln x$ ($m \in \mathbf{R}$).

(1) 讨论函数 $f(x)$ 的极值点个数；

(2) 若 $m > 0$ ， $f(x)$ 的最小值是 $1 + \ln m$ ，求实数 m 的所有可能值.

(二) 选做题：共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答. 如果多做，则按所做的第一题记分.

22. (10 分) 选修 4-4：坐标系与参数方程

在平面直角坐标系中，曲线 E 的参数方程为 $\begin{cases} x = \sqrt{2} + \cos\theta \\ y = \sin\theta \end{cases}$ (θ 为参数)，以坐标原点为极点， x 轴正半轴为极轴，建立极坐标系，射线 $l_1: \theta = \beta$ ($-\frac{\pi}{4} < \beta < 0$) 与 E 交于 A, B 两点，射线 $l_2: \theta = \beta + \frac{\pi}{4}$ 与 E 交于 C, D 两点.

(1) 求曲线 E 的极坐标方程；

(2) 求 $\frac{|OC| + |OD|}{|OA| + |OB|}$ 的取值范围.

23. (10 分) 选修 4-5：不等式选讲

已知函数 $f(x) = 2\sqrt{x^2 + 2ax + a^2} - 2|x - b|$ ($a > 0, b > 0$) 的最大值为 2.

(1) 求 $a + b$ 的值；

(2) 证明： $\frac{1}{a} + \frac{4}{b} + \frac{4}{(3a+1)b} \geq 12$.