

内江市高中 2023 届第三次模拟考试题

数学(理科)参考答案及评分意见

一、选择题(本大题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分.)

1. B 2. A 3. D 4. C 5. A 6. B 7. D 8. C 9. C 10. B 11. D 12. A

二、填空题(本大题共 4 小题,每小题 5 分,满分 20 分.)

13. $-\frac{8}{3}$ 14. 5 15. $\frac{41}{72}$ 16. $\frac{7}{13}$

三、解答题(共 70 分,解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤,第 17~21 题为必考题,每个试题考生都必须作答,第 22、23 题为选考题,考生根据要求作答.)

17. 解:(1)当 $n=1$ 时,由 $S_2 = 2S_1 + 2$ 得: $S_2 = 2S_1 + 2$, 即 $a_1 + a_2 = 2a_1 + 2$,
又 $a_1 = 2$, $\therefore a_2 = 4$; 1 分

当 $n \geq 2$ 时, $a_{n+1} = S_{n+1} - S_n = 2S_n + 2 - 2S_n - 2 = 2a_n$, 3 分

又 $a_1 = 2, a_2 = 4$ 满足 $a_2 = 2a_1$, 即当 $n=1$ 时, $a_{n+1} = 2a_n$ 成立, 4 分

$\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 是以 2 为首项, 2 为公比的等比数列, $\therefore a_n = 2^n (n \in \mathbb{N}^*)$ 6 分

(2) 由(1)得: $b_n = \frac{n \cdot 2^n}{(n+1)(n+2)} = \frac{2^{n-1}}{n+2} - \frac{2^n}{n+1}$, 9 分

$\therefore T_n = \frac{2^2}{3} - \frac{2^1}{2} + \frac{2^3}{4} - \frac{2^2}{3} + \frac{2^4}{5} - \frac{2^3}{4} + \cdots + \frac{2^n}{n+1} - \frac{2^{n-1}}{n} + \frac{2^{n+1}}{n+2} - \frac{2^n}{n+1} = \frac{2^{n+1}}{n+2} - 1$ 12 分

18. 解:(1)甲组数据的平均数为 $\frac{10+10+14+18+22+25+27+30+41+43}{10} = 24$, 1 分

乙组数据的平均数为 $\frac{10+18+20+22+23+31+32+31+30+43}{10} = 26$, 2 分

易知 $m=5, n=5$, 所以 $m=n$; 4 分

(2) X 的可能取值为 0, 1, 2, 5 分

$P(X=0) = \frac{C_3^0 C_7^2}{C_{10}^2} = \frac{2}{9}, P(X=1) = \frac{C_3^1 C_7^1}{C_{10}^2} = \frac{5}{9}, P(X=2) = \frac{C_3^2 C_7^0}{C_{10}^2} = \frac{2}{9}$, 8 分

X 的分布列为:

X	0	1	2
P	$\frac{2}{9}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{2}{9}$

$\therefore E(X) = 0 \times \frac{2}{9} + 1 \times \frac{5}{9} + 2 \times \frac{2}{9} = 1$ 10 分

(3) 当 $a=b=0$ 时, s^2 达到最小值. 12 分

19. 解:(1)证明: $\because CD \perp AD, CD \perp BD, AD \cap BD = D, AD, BD \subset$ 平面 ABD ,

$\therefore CD \perp$ 平面 $ABD, \because AB \subset$ 平面 $ABD, \therefore CD \perp AB$ 2 分

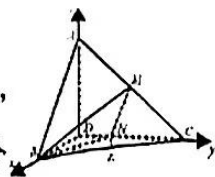
又 $\because M, E$ 分别为 AC, BC 的中点, $\therefore ME \parallel AB, \therefore CD \perp ME$ 4 分

(2) 选 B, 在图 1 所示的 $\triangle ABC$ 中, 由 $\tan 2B = -\frac{4}{3} = \frac{2\tan B}{1-\tan^2 B}$, 2 分

解得 $\tan B = 2$ 或 $\tan B = -\frac{1}{2}$ (舍去) 4 分

设 $AD = CD = x$, 在 $Rt \triangle ABD$ 中, $\tan B = \frac{AD}{BD} = \frac{x}{3-x} = 2$, 解得 $x = 2, \therefore BD = 1$ 6 分

以点 D 为原点, DB, DC, DA 分别为 x, y, z 轴建立如图所示的坐标系 $D-xyz$,
 $D(0,0,0), B(1,0,0), C(0,2,0), A(0,0,2), M(0,1,1), E\left(\frac{1}{2}, 1, 0\right)$, 则 $\overrightarrow{BM} = (-1,$
 $1, 1)$ 7 分



设 $N(0, a, 0)$, 则 $\overrightarrow{EN} = \left(-\frac{1}{2}, a-1, 0\right)$

$\because EN \perp BM, \therefore \overrightarrow{EN} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$, 即 $\left(-\frac{1}{2}, a-1, 0\right) \cdot (-1, 1, 1) = 0$, 解得 $a = \frac{1}{2}$,

$\therefore$ 当 $DN = \frac{1}{2}$ (即 N 是 CD 的靠近 D 的一个四等分点) 时, $EN \perp BM$ 8 分

设平面 BMN 的一个法向量为 $n = (x, y, z)$, $\overrightarrow{BN} = \left(-1, \frac{1}{2}, 0\right)$, 由 $\begin{cases} n \cdot \overrightarrow{BN} = 0, \\ n \cdot \overrightarrow{BM} = 0, \end{cases}$ 得 $\begin{cases} -x + \frac{1}{2}y = 0, \\ -x + y + z = 0, \end{cases}$

令 $x = 1$, 则 $n = (1, 2, -1)$, 取平面 CBN 的一个法向量 $\vec{m} = (0, 0, 1)$, 10 分

则 $|\cos \langle m, n \rangle| = \frac{|\vec{m} \cdot \vec{n}|}{|\vec{m}| |\vec{n}|} = \frac{|(0, 0, 1) \cdot (1, 2, -1)|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$,

$\therefore$ 平面 BMN 与平面 CBN 的夹角的余弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{6}$ 12 分

选②, 在图 1 所示的 $\triangle ABC$ 中, 设 $\overrightarrow{BD} = \lambda \overrightarrow{BC}$,
 则 $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} + \lambda \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \lambda (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = (1-\lambda)\overrightarrow{AB} + \lambda \overrightarrow{AC}$, 4 分

又 $\because \overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$, 由平面向量基本定理知 $\lambda = \frac{1}{3}$, 即 $BD = 1$ 6 分

(以下步骤同上)

选③, 在图 1 所示的 $\triangle ABC$ 中, 设 $BD = x (0 < x < 3)$, 则 $CD = 3 - x$,

$\therefore AD = CD = 3 - x$.

折起后 $AD \perp DC, AD \perp BD$, 且 $BD \cap DC = D, BD, DC \subset$ 平面 BCD ,

$\therefore AD \perp$ 平面 BCD , 2 分

又 $\angle BDC = 90^\circ, \therefore S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2}x(3-x)$,

$V_{A-BCD} = \frac{1}{3}AD \cdot S_{\triangle BCD} = \frac{1}{3}(3-x) \cdot \frac{1}{2}x(3-x) = \frac{1}{6}(x^3 - 6x^2 + 9x), x \in (0, 3)$, 4 分

令 $f(x) = \frac{1}{6}(x^3 - 6x^2 + 9x), f'(x) = \frac{1}{2}(x-1)(x-3)$,

当 $0 < x < 1$ 时, $f'(x) > 0$; 当 $1 < x < 3$ 时, $f'(x) < 0$,

$\therefore$ 当 $x = BD = 1$ 时, 三棱锥 $A-BCD$ 的体积最大 6 分

(以下步骤同上)

20. 解: (1) 设 $F(x) = f(x) - g(x) = x^2 - 2e \ln x (x > 0)$, 1 分

$\therefore F'(x) = 2x - \frac{2e}{x} = \frac{2(x - \sqrt{e})(x + \sqrt{e})}{x}$, 令 $F'(x) = 0$, 得 $x = \sqrt{e}$, 2 分

当 $0 < x < \sqrt{e}$ 时, $F'(x) < 0$, $x > \sqrt{e}$ 时, $F'(x) > 0$,

故当 $x = \sqrt{e}$ 时, $F(x)$ 取到最小值, 最小值是 0, 4 分

从而函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的图象在 $x = \sqrt{e}$ 处有公共点, 其坐标为 $(\sqrt{e}, e)$ 5 分

(2) 由 (1) 可知, 函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的图象在 $x = \sqrt{e}$ 处有公共点,

如果存在 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的隔离直线, 那么该直线过这个公共点, 6 分

设隔离直线方程为 $y - e = k(x - \sqrt{e})$, 即 $y = kx - k\sqrt{e} + e$,

由 $f(x) \geq kx - k\sqrt{e} + e (x \in \mathbb{R})$, 可得 $x^2 - kx + k\sqrt{e} - e \geq 0$ 在 $x \in \mathbb{R}$ 上恒成立,

则 $\Delta = k^2 - 4k\sqrt{e} + 4e = (k - 2\sqrt{e})^2 \leq 0$, 只有 $k = 2\sqrt{e}$, 8 分

此时直线方程为: $y = 2\sqrt{e}x - e$ 9 分

下面证明 $g(x) \leq 2\sqrt{e}x - e$ 恒成立,

令 $G(x) = 2\sqrt{e}x - e - g(x) = 2\sqrt{e}x - e - 2e\ln x$,

$G'(x) = 2\sqrt{e} - \frac{2e}{x} = \frac{2\sqrt{e}x - 2e}{x} = \frac{2\sqrt{e}(x - \sqrt{e})}{x}$, 当 $x = \sqrt{e}$ 时, $G'(x) = 0$,

当 $0 < x < \sqrt{e}$ 时 $G'(x) < 0$, 函数单调递减; $x > \sqrt{e}$ 时, $G'(x) > 0$, 函数单调递增,

则当 $x = \sqrt{e}$ 时, $G(x)$ 取到最小值是 0, 11 分

所以 $G(x) = 2\sqrt{e}x - e - g(x) \geq 0$, 则 $g(x) \leq 2\sqrt{e}x - e$ 当 $x > 0$ 时恒成立.

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 存在唯一的隔离直线 $y = 2\sqrt{e}x - e$ 12 分

21. 解: (1) 设曲线 C_1 的方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, 则 $2a = |AF_1| + |AF_2| = \frac{7}{2} + \frac{5}{2} = 6$,

得 $a = 3$, 1 分

设 $A(x, y)$, $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$, 曲线 C_2 的方程为 $y^2 = 4cx$, 其中 $c > 0$,

则 $(x+c)^2 + y^2 = \left(\frac{7}{2}\right)^2$, $(x-c)^2 + y^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2$

两式相减得 $xc = \frac{3}{2}$, 2 分

由抛物线定义可知 $|AF_2| = x + c = \frac{5}{2}$, 3 分

因为 $\angle AF_2F_1$ 为钝角, 则 $x > c$, 解得 $\begin{cases} c = 1 \\ x = \frac{3}{2} \end{cases}$, 4 分

所以, 曲线 C_1 的方程为 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1 \left(x \leq \frac{3}{2}\right)$, 5 分

曲线 C_2 的方程为 $y^2 = 4x$ 且 $x \leq \frac{3}{2}$ 6 分

(2) 设 $B(x_1, y_1)$, $E(x_2, y_2)$, $G(x_3, y_3)$, $D(x_4, y_4)$, 设直线 BE 的方程为 $x = my + 1$, 其中 m

$\neq 0$, 联立 $\begin{cases} x = my + 1 \\ 8x^2 + 9y^2 = 72 \end{cases}$ 可得 $(8m^2 + 9)y^2 + 16my - 64 = 0$,

$y_1 + y_2 = -\frac{16m}{8m^2 + 9}$, $y_1 y_2 = -\frac{64}{8m^2 + 9}$, 8 分

联立 $\begin{cases} x = my + 1 \\ y^2 = 4x \end{cases}$ 可得 $y^2 - 4my - 4 = 0, y_3 + y_4 = 4m, y_3 y_4 = -4$ 10 分

$$\text{所以, } \frac{|BE| \cdot |GF_2|}{|CD| \cdot |HF_2|} = \frac{\sqrt{1+m^2} \cdot |y_1 - y_2| \cdot \sqrt{1+m^2} \cdot \left| \frac{y_3 + y_4}{2} \right|}{\sqrt{1+m^2} \cdot |y_3 - y_4| \cdot \sqrt{1+m^2} \cdot \left| \frac{y_1 + y_2}{2} \right|} = \sqrt{\frac{(y_1 - y_2)^2 \cdot (y_3 + y_4)^2}{(y_1 + y_2)^2 \cdot (y_3 - y_4)^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{(y_1 + y_2)^2 - 4y_1 y_2}{(y_1 + y_2)^2} \cdot \frac{(y_3 + y_4)^2}{(y_3 + y_4)^2 - 4y_3 y_4}} = \sqrt{\frac{\left(-\frac{16m}{8m^2+9} \right)^2 + \frac{256}{8m^2+9}}{\left(-\frac{16m}{8m^2+9} \right)^2} \cdot \frac{16m^2}{16m^2+16}} = 3 \quad \text{..... 12 分}$$

22. 解：(1) 由 $\rho = 4\cos\alpha$ 得 $\rho^2 = 4\rho\cos\alpha$, 将 $\begin{cases} \rho = x^2 + y^2 \\ \rho\cos\alpha = x \end{cases}$ 代入整理得,

曲线 C_1 的普通方程为 $(x-2)^2 + y^2 = 4$, 2 分

设曲线 C_1 上的点为 (x', y') , 变换后的点为 (x, y) , 由题可知坐标变换为 $\begin{cases} x = x' - 2 \\ y = \frac{1}{2}y' \end{cases}$,

即 $\begin{cases} x' = x + 2 \\ y' = 2y \end{cases}$, 代入曲线 C_1 的普通方程, 整理得曲线 C_2 的普通方程 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, 4 分

$\therefore$ 曲线 C_2 的参数方程为 $\begin{cases} x = 2\cos\theta \\ y = \sin\theta \end{cases}$ (θ 为参数). 5 分

(2) 设四边形 $MNPQ$ 的周长为 l , 设点 $M(2\cos\theta, \sin\theta)$ ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$), 6 分

$$l = 8\cos\theta + 4\sin\theta = 4\sqrt{5}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\cos\theta + \frac{1}{\sqrt{5}}\sin\theta\right) = 4\sqrt{5}\sin(\theta + \varphi), \text{ 且 } \cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{5}}, \sin\varphi = \frac{2}{\sqrt{5}} \quad \text{..... 7 分}$$

$$\because 0 < \theta < \frac{\pi}{2}, \therefore \varphi < \theta < \frac{\pi}{2} + \varphi, \therefore \sin(\theta + \varphi) \leq 1,$$

$\therefore l_{\max} = 4\sqrt{5}$. 且当 $\theta + \varphi = \frac{\pi}{2}$ 时, l 取最大值, 此时 $\theta = \frac{\pi}{2} - \varphi$, 8 分

$$\text{所以, } 2\cos\theta = 2\sin\varphi = \frac{4}{\sqrt{5}}, \sin\theta = \cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{5}}, \text{ 此时 } M\left(\frac{4\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}\right) \quad \text{..... 10 分}$$

23 解：当 $a = 1$ 时, $f(x) = |2x - 4| + |x^2 + 1|$

当 $x \geq 2$ 时, $f(x) = x^2 + 2x - 3 \geq f(2) = 5$, 2 分

当 $x < 2$ 时, $f(x) = x^2 - 2x + 5 \geq f(1) = 4$,

所以 $f(x) \geq 4$ 4 分

(2) 当 $x \in [1, 2]$ 时, $f(x) = 4 - 2x + |x^2 + a|$,

由 $f(x) \leq 4$, 得 $-x - 2x \leq a \leq -x + 2x$, 6 分

设 $h(x) = -x - 2x, g(x) = -x + 2x$,

对任意 $x \in [1, 2]$ $f(x) \leq 4$ 恒成立, 所以 $h_{\max}(x) \leq a \leq g_{\min}(x)$, 8 分

因为在区间 $[1, 2]$ 上, $h_{\max}(x) = h(1) = -3, g_{\min}(x) = g(2) = 0$,

所以 $-3 \leq a \leq 0$. 即实数 a 的取值范围为 $[-3, 0]$ 10 分