

内江市高中 2023 届第三次模拟考试题

数学(文科)参考答案及评分意见

一、选择题(本大题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分.)

1. B 2. A 3. D 4. C 5. A 6. B 7. D 8. C 9. C 10. B 11. D 12. A

二、填空题(本大题共 4 小题,每小题 5 分,满分 20 分.)

13. -8 14. 1 15. $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{8} = 1$ 16. $\frac{7}{24}$

三、解答题(共 70 分,解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤,第 17~21 题为必考题,每个试题考生都必须作答,第 22、23 题为选考题,考生根据要求作答.)

17. 解:(1)当 $n=1$ 时,由 $S_1 = 2S_1 - 2$ 得: $S_1 = 2S_1 + 2$, 即 $a_1 + a_2 = 2a_1 + 2$,

又 $a_1 = 2, a_2 = 4$; 1 分

当 $n \geq 2$ 时, $a_{n+1} = S_{n+1} - S_n = 2S_n + 2 - 2S_{n-1} - 2 = 2a_n$, 3 分

又 $a_1 = 2, a_2 = 4$ 满足 $a_2 = 2a_1$, 即当 $n=1$ 时, $a_{n+1} = 2a_n$ 成立, 4 分

$\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 是以 2 为首项, 2 为公比的等比数列, $\therefore a_n = 2^n (n \in \mathbb{N}^+)$ 6 分

(2) 由(1)得: $b_n = \frac{n \cdot 2^n}{(n+1)(n+2)} = \frac{2^{n+1}}{n+2} - \frac{2^n}{n+1}$, 9 分

$\therefore T_n = \frac{2^2}{3} - \frac{2^1}{2} + \frac{2^3}{4} - \frac{2^2}{3} + \frac{2^4}{5} - \frac{2^3}{4} + \cdots + \frac{2^n}{n+1} - \frac{2^{n-1}}{n} + \frac{2^{n+1}}{n+2} - \frac{2^n}{n+1} = \frac{2^{n+1}}{n+2} - 1$ 12 分

18. 解:(1)根据茎叶图可知甲组数据的平均数为

$\frac{10+10+14+18+22+25+27+34}{8} = 20$, 1 分

乙组数据的平均数为 $\frac{10+20+22+23+31+32+31+31}{8} = 25$, 2 分

甲型号电视机的“星级卖场”数量为 $m=4$, 乙型号电视机的“星级卖场”数量为 $n=4$

所以 $m=n$; 4 分

(2) 由(1)知, 甲型号电视机的“星级卖场”数量为 4, 设选取的两个卖场都是甲型电视机的“星级卖场”设为事件 M , 设甲型号电视机的“星级卖场”分别为 a, b, c, d , 甲型号电视机的非“星级卖场”分别为 A, B, C, D , 从这 8 个卖场中, 随机选取 2 个卖场, 有 $AB, AC, AD, Aa, Ab, Ac, Ad, BC, BD, Ba, Bb, Bc, Bd, CD, Ca, Cb, Cc, Cd, Da, Db, Dc, Dd, ab, ac, ad, bc, bd, cd$, 共计 28 个

..... 6 分

其中满足条件为 ab, ac, ad, bc, bd, cd , 共计 6 个 8 分

所以, $P(M) = \frac{6}{28} = \frac{3}{14}$ 10 分

(3) $a=b=0$ 当时, s^2 达到最小值. 12 分

19. 解:(1) 证明: $\because CD \perp AD, CD \perp BD, AD \cap BD = D, AD, BD \subset$ 平面 ABD ,

$\therefore CD \perp$ 平面 $ABD, \because AB \subset$ 平面 $ABD, \therefore CD \perp AB$ 2 分

又 $\because M, E$ 分别为 AC, BC 的中点,

$\therefore ME \parallel AB$, 4 分

$\therefore CD \perp ME$ 5 分

(2) 图 1 所示的 $\triangle ABC$ 中, 设 $BD = x (0 < x < 3)$, 则 $CD = 3 - x$,

$\because AD \perp BC, \angle ACB = 45^\circ, \therefore \triangle ADC$ 为等腰直角三角形, $\therefore AD = CD = 3 - x$.

折起后 $AD \perp DC, AD \perp BD$, 且 $BD \cap DC = D, BD, DC \subset$ 平面 BCD ,

$\therefore AD \perp$ 平面 BCD , 7 分

又 $\angle BDC = 90^\circ, \therefore S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2}x(3-x)$,

$V_{A-BCD} = \frac{1}{3}AD \cdot S_{\triangle BCD} = \frac{1}{3}(3-x) \cdot \frac{1}{2}x(3-x) = \frac{1}{6}(x^3 - 6x^2 + 9x), x \in (0, 3)$, 8 分

令 $f(x) = \frac{1}{6}(x^3 - 6x^2 + 9x), f'(x) = \frac{1}{2}(x-1)(x-3)$,

当 $0 < x < 1$ 时 $f'(x) > 0$; 当 $1 < x < 3$ 时 $f'(x) < 0$,

$\therefore x = BD = 1$ 时, 三棱锥 $A-BCD$ 的体积最大 9 分

又易知 $BD \perp$ 平面 ACD , 因为 E 为线段 BC 的中点, 所以 E 到平面 ACD 的距离为 $\frac{1}{2}BD = \frac{1}{2}$ 10 分

又 $V_{A-MDE} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}S_{\triangle ADM} = \frac{1}{6}$,

故三棱锥 $A-MDE$ 的体积为 $\frac{1}{6}$ 12 分

20. 解: (1) 设 $F(x) = f(x) - g(x) = x^2 - 2e \ln x (x > 0)$, 1 分

$\therefore F'(x) = 2x - \frac{2e}{x} = \frac{2(x - \sqrt{e})(x + \sqrt{e})}{x}$, 令 $F'(x) = 0$, 得 $x = \sqrt{e}$, 2 分

当 $0 < x < \sqrt{e}$ 时, $F'(x) < 0$; 当 $x > \sqrt{e}$ 时, $F'(x) > 0$,

故当 $x = \sqrt{e}$ 时, $F(x)$ 取到最小值, 最小值是 0, 4 分

从而函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的图象在 $x = \sqrt{e}$ 处有公共点, 其坐标为 $(\sqrt{e}, e)$ 5 分

(2) 由 (1) 可知, 函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的图象在 $x = \sqrt{e}$ 处有公共点,

如果存在 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的隔离直线, 那么该直线过这个公共点, 6 分

设隔离直线方程为 $y - e = k(x - \sqrt{e})$, 即 $y = kx - k\sqrt{e} + e$,

由 $f(x) \geq kx - k\sqrt{e} + e (x \in R)$, 可得 $x^2 - kx + k\sqrt{e} - e \geq 0$ 在 $x \in R$ 上恒成立,

则 $\Delta = k^2 - 4k\sqrt{e} + 4e = (k - 2\sqrt{e})^2 \leq 0$, 只有 $k = 2\sqrt{e}$, 8 分

此时直线方程为: $y = 2\sqrt{e}x - e$ 9 分

下面证明 $g(x) \leq 2\sqrt{e}x - e$ 恒成立,

令 $G(x) = 2\sqrt{e}x - e - g(x) = 2\sqrt{e}x - e - 2e \ln x$,

$G'(x) = 2\sqrt{e} - \frac{2e}{x} = \frac{2(\sqrt{e}x - e)}{x}$, 当 $x = \sqrt{e}$ 时, $G'(x) = 0$,

当 $0 < x < \sqrt{e}$ 时 $G'(x) < 0$, 函数单调递减; 当 $x > \sqrt{e}$ 时, $G'(x) > 0$, 函数单调递增,

则当 $x = \sqrt{e}$ 时, $G(x)$ 取到最小值是 0, 11 分

所以 $G(x) = 2\sqrt{e}x - e - g(x) \geq 0$, 则 $g(x) \leq 2\sqrt{e}x - e$ 当 $x > 0$ 时恒成立.

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 存在唯一的隔离直线 $y = 2\sqrt{e}x - e$ 12 分

21. 解：(1)由题意易知： $\begin{cases} 2c=2 \\ \frac{b}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2} \\ a^2=b^2+c^2 \end{cases}$ 2分

解得： $\begin{cases} a=2 \\ b=\sqrt{3} \\ c=1 \end{cases}$ 3分

$\therefore$ 椭圆 C 的方程为： $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 4分

(2)由(1)知椭圆 C 右焦点 F 坐标为 $(1,0)$ ，设直线 $AB: x = my + 1, A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), P(n, 0)$,

由 $\begin{cases} x = my + 1 \\ 3x^2 + 4y^2 - 12 = 0 \end{cases}$ 得 $(3m^2 + 4)y^2 + 6my - 9 = 0$

显然 $\Delta > 0$ ，且 $\begin{cases} y_1 + y_2 = -\frac{6m}{3m^2 + 4} \\ y_1 y_2 = -\frac{9}{3m^2 + 4} \end{cases}$ 6分

此时 $k_{PA} k_{PB} = \frac{y_1}{x_1 - n} \cdot \frac{y_2}{x_2 - n} = \frac{y_1 y_2}{(my_1 + 1 - n)(my_2 + 1 - n)} = \frac{y_1 y_2}{m^2 y_1 y_2 + (1 - n)m(y_1 + y_2) + (1 - n)^2}$
 $= \frac{-\frac{9}{3m^2 + 4}}{-\frac{9m^2}{3m^2 + 4} - (1 - n)m \frac{6m}{3m^2 + 4} + (1 - n)^2} = \frac{9}{9m^2 + 6m^2(1 - n) - (1 - n)^2(3m^2 + 4)}$
 $= \frac{9}{3m^2(4 - n)^2 - 4(1 - n)^2}$ 9分

由上式知：无论 m 取何值，当 $n^2 = 4$ ，即 $n = \pm 2$ 时， $k_{PA} k_{PB}$ 是一个与 m 无关的定值，

当 $n = -2$ 时， $k_{PA} k_{PB} = \frac{9}{-4 \times 3^2} = -\frac{1}{4}$ ； 10分

当 $n = 2$ 时， $k_{PA} k_{PB} = \frac{9}{-4 \times 1} = -\frac{9}{4}$ 11分

综上所述，存在定点 P 满足题意。当定点为 $P(-2, 0)$ 时，直线 AP, PB 斜率之积为 $-\frac{1}{4}$ ；

当定点为 $P(2, 0)$ 时，直线 AP, PB 斜率之积为 $-\frac{9}{4}$ 12分

22. 解：(1)由 $\rho = 4\cos\alpha$ 得 $\rho^2 = 4\rho\cos\alpha$ 将 $\begin{cases} \rho^2 = x^2 + y^2 \\ \rho\cos\alpha = x \end{cases}$ 代入整理得，

曲线 C_1 的普通方程为 $(x - 2)^2 + y^2 = 4$ 2分

设曲线 C_1 上的点为 (x', y') ，变换后的点为 (x, y) ，由题可知坐标变换为 $\begin{cases} x = x' - 2 \\ y = \frac{1}{2}y' \end{cases}$ ，

即 $\begin{cases} x' = x + 2 \\ y' = 2y \end{cases}$ ，代入曲线 C_1 的普通方程，整理得曲线 C_2 的普通方程 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ ， 4分

∴ 曲线 C_2 的参数方程为 $\begin{cases} x = 2\cos\theta \\ y = \sin\theta \end{cases}$ (θ 为参数). 5 分

(2) 设四边形 $MNPQ$ 的周长为 l , 设点 $M(2\cos\theta, \sin\theta)$ ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$), 6 分

$l = 8\cos\theta + 4\sin\theta = 4\sqrt{5}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\cos\theta + \frac{1}{\sqrt{5}}\sin\theta\right) = 4\sqrt{5}\sin(\theta + \varphi)$, 且 $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{5}}, \sin\varphi = \frac{2}{\sqrt{5}}$ 7 分

∵ $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, ∴ $\varphi < \theta < \frac{\pi}{2} + \varphi$, ∴ $\sin(\theta + \varphi) \leq 1$,

∴ $l_{\max} = 4\sqrt{5}$. 且当 $\theta + \varphi = \frac{\pi}{2}$ 时, l 取最大值, 此时 $\theta = \frac{\pi}{2} - \varphi$, 8 分

所以, $2\cos\theta = 2\sin\varphi = \frac{4}{5}, \sin\theta = \cos\varphi = \frac{1}{5}$, 此时 $M\left(\frac{4\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}\right)$ 10 分

23 解: 当 $a = 1$ 时, $f(x) = |2x - 4| + |x^2 + 1|$

当 $x \geq 2$ 时, $f(x) = x^2 + 2x + 3 \geq f(2) = 5$, 2 分

当 $x < 2$ 时, $f(x) = x^2 - 2x + 5 \geq f(1) = 4$,

所以 $f(x) \geq 4$ 4 分

(2) 当 $x \in [1, 2]$ 时 $f(x) = 4 - 2x + |x^2 + a|$,

由 $f(x) \leq 4$, 得 $-x^2 - 2x \leq a \leq -x^2 + 2x$, 6 分

设 $h(x) = -x^2 - 2x, g(x) = -x^2 + 2x$,

对任意 $x \in [1, 2]$, $f(x) \leq 4$ 恒成立, 所以 $h_{\max}(x) \leq a \leq g_{\min}(x)$, 8 分

因为在区间 $[1, 2]$ 上, $h_{\max}(x) = h(1) = -3, g_{\min}(x) = g(2) = 0$,

所以 $-3 \leq a \leq 0$. 即实数 a 的取值范围为 $[-3, 0]$ 10 分