

内江市高中 2023 届第三次模拟考试题

数 学(文科)

1. 本试卷包括第 I 卷(选择题)和第 II 卷(非选择题)两部分,共 4 页。全卷满分 150 分,考试时间 120 分钟。

2. 答第 I 卷时,用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑,如需改动,用橡皮擦干净后;再选涂其它答案标号;答第 II 卷时,用 0.5 毫米的黑色签字笔在答题卡规定的区域内作答,字体工整,笔迹清楚;不能答在试题卷上。

3. 考试结束后,监考员将答题卡收回。

第 I 卷(选择题,共 60 分)

一、选择题:本大题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分。在每个小题所给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的,把正确选项的代号填在答题卡的指定位置。

1. 已知复数 $2z - \bar{z} = 1 - 3i$, 其中 i 是虚数单位, $\bar{z}$ 是 z 的共轭复数, 则 $z =$

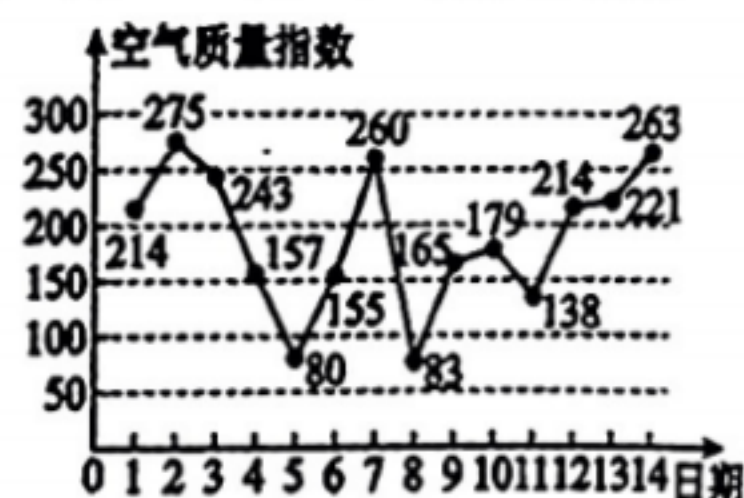
- A. $1 + i$ B. $1 - i$ C. $-1 + i$ D. $-1 - i$

2. 已知全集 $U = \mathbb{R}$, $M = \{x | x^2 - 4x + 3 \leq 0\}$, $N = \{x | 0 < x \leq 2\}$, 则 $\complement_U(M \cup N) =$

- A. $(-\infty, 0] \cup (3, +\infty)$ B. $(-\infty, 3)$ C. $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$ D. $(3, +\infty)$

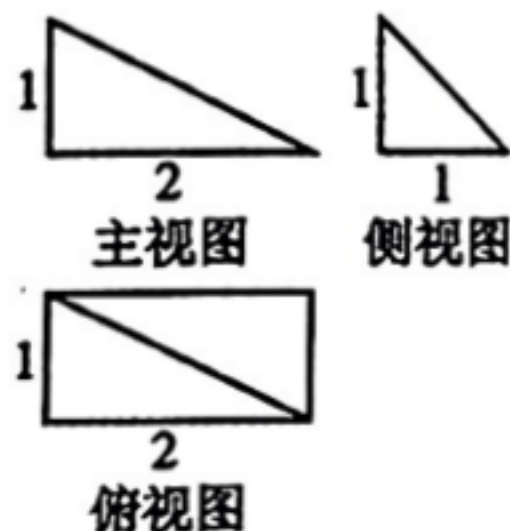
3. 空气质量指数是评估空气质量状况的一组数字,空气质量指数划分为 $[0, 50)$ 、 $[50, 100)$ 、 $[100, 150)$ 、 $[150, 200)$ 、 $[200, 300)$ 和 $[300, 500)$ 六档,分别对应“优”、“良”、“轻度污染”、“中度污染”、“重度污染”和“严重污染”六个等级。如图是某市 4 月 1 日至 14 日连续 14 天的空气质量指数趋势图,则下列说法中正确的是

- A. 从 2 日到 5 日空气质量越来越差
B. 这 14 天中空气质量指数的中位数是 214
C. 连续三天中空气质量指数方差最小是 5 日到 7 日
D. 这 14 天中空气质量指数的平均数约为 189

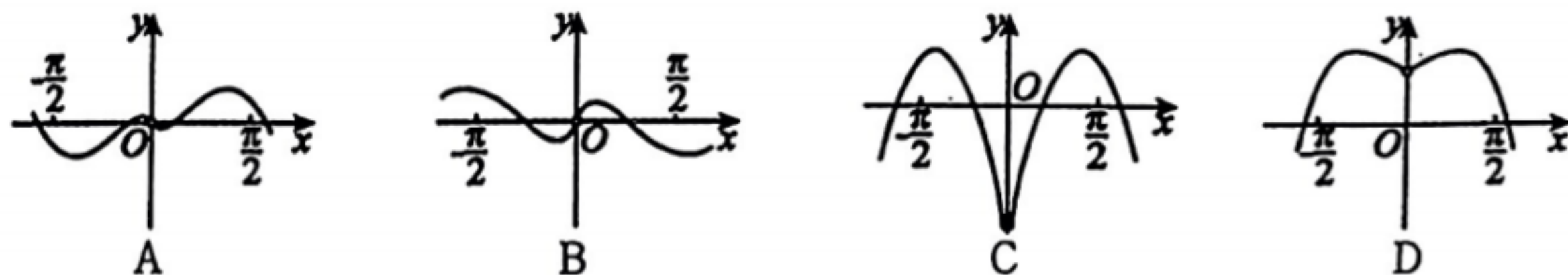


4. 我国古代数学名著《九章算术》中几何模型“阳马”意指底面为矩形,一侧棱垂直于底面的四棱锥。某“阳马”的三视图如图所示,则该四棱锥中棱长的最大值为

- A. $\sqrt{2}$ B. $\sqrt{5}$
C. $\sqrt{6}$ D. 2



5. 函数 $f(x) = x \cos x + (\sin x) \ln |x|$ 的部分图像大致为



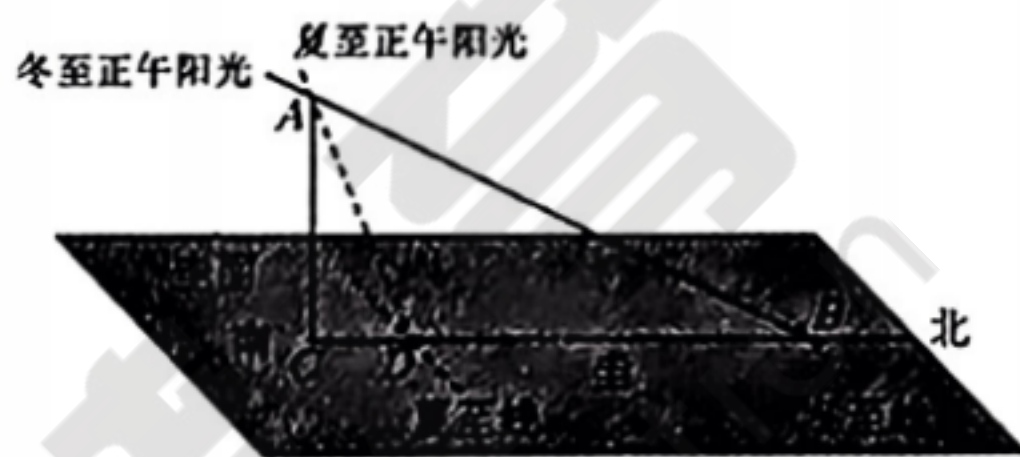
6. 已知函数 $f(x) = \frac{x}{e^x} - a$ 和 $g(x) = \frac{\ln x}{x} + b$ 有相同的极大值, 则 $a + b =$

- A. 2 B. 0 C. -3 D. -1

7. 一个人连续射击 2 次, 则下列各事件关系中, 说法正确的是

- A. 事件“两次均击中”与事件“至少一次击中”互为对立事件
B. 事件“第一次击中”与事件“第二次击中”为互斥事件
C. 事件“两次均未击中”与事件“至多一次击中”互为对立事件
D. 事件“恰有一次击中”与事件“两次均击中”为互斥事件

8. 圭表是我国古代一种通过测量正午日影长度来推定节气的天文仪器, 它包括一根直立的标竿(称为“表”)和一把呈南北方向水平固定摆放的与标竿垂直的长尺(称为“圭”). 当正午太阳照射在表上时, 日影便会投影在圭面上, 圭面上日影长度最长的那一天定为冬至, 日影长度最短的那一天定为夏至. 如图是一个根据某地的地理位置设计的圭表的示意图, 已知该地冬至正午太阳高度角(即 $\angle ABC$)约为 32.5° , 夏至正午太阳高度角(即 $\angle ADC$)约为 79.5° , 圭面上冬至线与夏至线之间的距离(即 DB 的长)为 14 米, 则表高(即 AC 的长)约为(其中, $\tan 32.5^\circ \approx \frac{3}{5}$, $\tan 79.5^\circ \approx \frac{27}{5}$)



- A. 9.27 米 B. 9.33 米 C. 9.45 米 D. 9.51 米

9. 已知圆锥的母线长为 2, 侧面积为 $2\sqrt{3}\pi$, 则过顶点的截面面积的最大值等于

- A. $\sqrt{3}$ B. $\sqrt{2}$ C. 2 D. 3

10. 阿基米德在他的著作《关于圆锥体和球体》中计算了一个椭圆的面积. 当我们垂直地缩小一个圆时, 我们得到一个椭圆, 椭圆的面积等于圆周率 π 与椭圆的长半轴长与短半轴长的乘积, 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的面积为 $6\sqrt{2}\pi$, 点 P 为椭圆 C 的上顶点. 直线 $y = kx$ 与椭圆 C 交于 A, B 两点, 若 PA, PB 的斜率之积为 $-\frac{8}{9}$, 则椭圆 C 的长轴长为

- A. 3 B. 6 C. $2\sqrt{2}$ D. $4\sqrt{2}$

11. 若函数 $f(x) = \sin(\omega x + \frac{\pi}{5}) (\omega > 0)$ 在区间 $(\pi, 2\pi)$ 上是单调函数, 则 ω 的取值可以是

- A. 2 B. $\frac{4}{5}$ C. $\frac{1}{5}$ D. $\frac{2}{5}$

12. 若关于 x 的不等式 $\ln x + a - \frac{3a-1}{x} < 0$ 有且只有一个整数解, 则正实数 a 的取值范围是

- A. $(\frac{1}{2}, 2\ln 2 + 1]$ B. $(\frac{1}{2}, 3\ln 3 + 1]$
C. $(2\ln 2 + 1, 3\ln 3 + 1]$ D. $[\ln 2 + \frac{1}{2}, 3\ln 3 + 1]$

第 II 卷(非选择题,共 90 分)

二、填空题:本大题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.

13. 已知 $|\vec{a}|=4$, 且 $\vec{a} \perp (\vec{a} + 2\vec{b})$, 则 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ _____.

14. 若 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} y \geq 0, \\ x - y + 1 \geq 0, \\ 2x + y - 4 \leq 0, \end{cases}$ 则 $z = \log_2(x + y - 1)$ 的最大值为 _____.

15. 设 F_1, F_2 分别是双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点, O 为坐标原点, 过左焦点

F_1 作直线 F_1P 与圆 $x^2 + y^2 = a^2$ 切于点 E , 与双曲线右支交于点 P , 且满足 $\vec{OE} = \frac{1}{2}(\vec{OP} + \vec{OF}_1)$, $|\vec{OE}| = \sqrt{2}$, 则双曲线的方程为 _____.

16. 甲、乙两人下围棋, 若甲执黑子先下, 则甲胜的概率为 $\frac{2}{3}$; 若乙执黑子先下, 则乙胜的概率为 $\frac{1}{2}$. 假定每局之间相互独立且无平局, 第二局由上一局负者先下, 若甲、乙比赛两局, 第一局

甲、乙执黑子先下是等可能的, 则甲胜第一局, 乙胜第二局的概率为 _____.

三、解答题:本大题共 6 小题,共 70 分,解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分 12 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且满足 $a_1 = 2, S_{n+1} = 2S_n + 2$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

(2) 记 $b_n = \frac{na_n}{(n+1)(n+2)}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

18. (本小题满分 12 分)

某厂商调查甲、乙两种不同型号电视机在 8 个卖场的销售量(单位:台), 并根据这 8 个卖场的销售情况, 得到如图所示的茎叶图. 为了鼓励卖场, 在同型号电视机的销售中, 该厂商将销售量高于数据平均数的卖场命名为该型号电视机的“星级卖场”.

甲		乙
4 8 0 0	1	0
7 5 2	2	0 2 3
4	3	1 2 a

(1) 当 $a=1, b=1$ 时, 记甲型号电视机的“星级卖场”数量为 m , 乙型号电视机的“星级卖场”数量为 n , 比较 m, n 的大小关系;

(2) 在这 8 个卖场中, 随机选取 2 个卖场, 求这两个卖场都是甲型号电视机的“星级卖场”的概率;

(3) 记乙型号电视机销售量的方差为 S^2 , 根据茎叶图推断 a 与 b 分别取何值时, S^2 达到最小值. (只需写出结论)

19. (本小题满分 12 分)

在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 45^\circ$, $BC = 3$, 过点 A 作 $AD \perp BC$, 交线段 BC 于点 D (如图 1), 沿 AD 将 $\triangle ABD$ 折起, 使 $\angle BDC = 90^\circ$ (如图 2), 点 E, M 分别为棱 BC, AC 的中点.

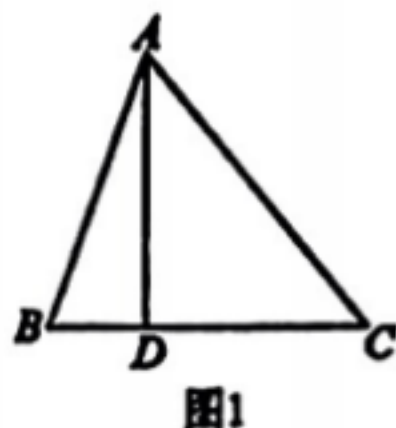


图1

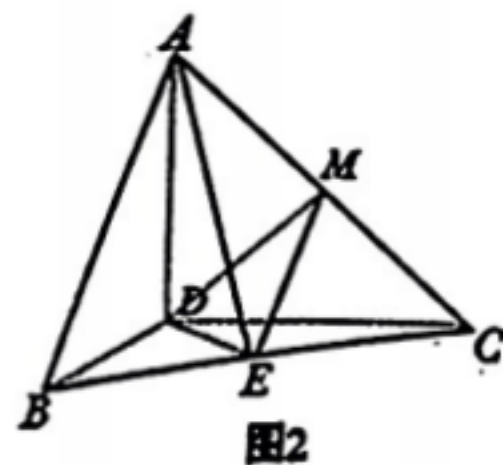


图2

(1) 求证： $CD \perp ME$ ；

(2) 在图 2 中，当三棱锥 $A-BCD$ 的体积取最大值时，求三棱锥 $A-MDE$ 的体积.

20. (本小题满分 12 分)

若存在实数 k, b , 使得函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 对其定义域上的任意实数 x 同时满足： $f(x) \geq kx + b$ 且 $g(x) \leq kx + b$, 则称直线： $l: y = kx + b$ 为函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的“隔离直线”. 已知 $f(x) = x^2$, $g(x) = 2e \ln x$ (其中 e 为自然对数的底数). 试问：

(1) 函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的图象是否存在公共点，若存在，求出公共点坐标，若不存在，说明理由；

(2) 函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是否存在“隔离直线”？若存在，求出此“隔离直线”的方程；若不存在，请说明理由.

21. (本小题满分 12 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的焦距为 2, 一条连接椭圆的两个顶点的直线斜率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(1) 求椭圆 C 的方程；

(2) 过椭圆 C 右焦点 F 且不与 x 轴重合的直线与椭圆 C 相交于 A, B 两点，试问 x 轴上是否存在点 P , 使得直线 AP, PB 斜率之积恒为定值？若存在，求出该定值及点 P 的坐标；若不存在，说明理由.

请考生在第 22、23 题中任选一题作答，并用 2B 铅笔将所选题号涂黑. 如果多做，则按所做的第一题计分.

22. (本小题满分 10 分)

在平面直角坐标系中，将曲线 C_1 向左平移 2 个单位，再将得到的曲线上的每一个点的横坐标保持不变，纵坐标缩短为原来的 $\frac{1}{2}$ 得到曲线 C_2 , 以坐标原点 O 为极点， x 轴的正半轴为极轴，建立极坐标系. 曲线 C_1 的极坐标方程为 $\rho = 4 \cos \alpha$.

(1) 求曲线 C_2 的参数方程；

(2) 已知点 M 在第一象限，四边形 $MNPQ$ 是曲线 C_2 的内接矩形，求内接矩形 $MNPQ$ 周长的最大值，并求周长最大时点 M 的坐标.

23. (本小题满分 10 分)

已知函数 $f(x) = |2x - 4| + |x^2 + a| (x \in \mathbb{R})$.

(1) 若 $a = 1$, 求证： $f(x) \geq 4$ ；

(2) 若对于任意 $x \in [1, 2]$, 都有 $f(x) \leq 4$, 求实数 a 的取值范围.