

秘密 ★ 启用前【考试时间：2023年3月28日15:00~17:00】

# 乐山市高中 2023 届第二次调查研究考试

## 数 学(理工类)

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、座位号和准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

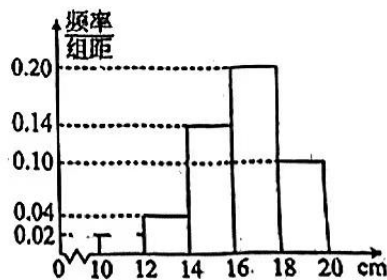
1. 已知  $(1+i)^2 z = 2+i$ ，则  $z =$

- A.  $\frac{1}{2} - i$                       B.  $1 - \frac{1}{2}i$                       C.  $\frac{1}{2} + i$                       D.  $\frac{3}{4} - \frac{1}{4}i$

2. 设全集为  $\mathbf{R}$ ，集合  $A = \left\{x \mid \frac{x+3}{x-2} \leq 0\right\}$ ， $B = \{x \mid x > 1\}$ ，则  $A \cap (\complement_{\mathbf{R}} B) =$

- A.  $\{x \mid -3 \leq x < 2\}$                       B.  $\{x \mid -3 \leq x < 1\}$   
C.  $\{x \mid -3 \leq x \leq 1\}$                       D.  $\{x \mid 1 < x \leq 2\}$

3. 某乡镇为推动乡村经济发展，优化产业结构，逐步打造高品质的农业生产，在某试验区种植了某农作物。为了解该品种农作物长势，在实验区随机选取了 100 株该农作物苗，经测量，其高度(单位：cm)均在区间  $[10, 20]$  内，按照  $[10, 12)$ ， $[12, 14)$ ， $[14, 16)$ ， $[16, 18)$ ， $[18, 20]$  分成 5 组，制成如图所示的频率分布直方图，记高度不低于 16 cm 的为“优质苗”。



则所选取的农作物样本苗中，“优质苗”株数为

- A. 20                      B. 40                      C. 60                      D. 88

4. 数学与音乐有着紧密的关联，我们平时听到的乐音一般来说并不是纯音，而是由多种波叠加而成的复合音。如图为某段乐音的图象，则该段乐音对应的函数解析式可以为



- A.  $y = \sin x + \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x$                       B.  $y = \sin x - \frac{1}{2} \sin 2x - \frac{1}{3} \sin 3x$   
C.  $y = \sin x + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{3} \cos 3x$                       D.  $y = \cos x + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{3} \cos 3x$

15. 已知  $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ ,  $\cos 2\alpha + 2\sin 2\alpha = 1$ , 则  $\sin \alpha =$

A.  $\frac{1}{5}$

B.  $\frac{\sqrt{5}}{5}$

C.  $\frac{4}{5}$

D.  $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

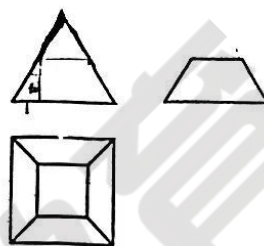
16. 一个四棱台的三视图如图所示, 其中正视图和侧视图均为上底长为 2, 下底长为 4, 腰长为 2 的等腰梯形, 则该四棱台的体积为

A.  $\frac{28\sqrt{3}}{3}$

B.  $\frac{56}{3}$

C.  $28\sqrt{3}$

D. 56



17. 已知实数  $a, b$  满足  $\log_2 a < \log_2 b < 0$ , 则下列各项中一定成立的是

A.  $\sqrt{a} > \sqrt{b}$

B.  $\sin 2a < \sin 2b$

C.  $\log_a e < \log_b e$

D.  $a^b < b^a$

18. 已知四棱柱  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  的底面是正方形,  $AB=2$ ,  $AA_1=2\sqrt{2}$ , 点  $B_1$  在底面  $ABCD$  的射影为  $BC$  中点  $H$ , 则直线  $AD_1$  与平面  $ABCD$  所成角的正弦值为

A.  $\frac{\sqrt{14}}{4}$

B.  $\frac{3}{4}$

C.  $\frac{\sqrt{7}}{4}$

D.  $\frac{\sqrt{6}}{3}$

19. 已知函数  $f(x) = \sqrt{3}\sin x - \cos x$ . 给出下列结论: ①  $f(-\frac{\pi}{3})$  是  $f(x)$  的最小值; ② 函数  $f(x)$  在  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  上单调递增; ③ 将函数  $y=2\sin x$  的图象上的所有点向左平移  $\frac{11\pi}{6}$  个单位长度, 可得函数  $y=f(x)$  的图象. 其中所有正确结论的序号是

A. ①②

B. ①③

C. ②③

D. ①②③

20. 已知直线  $l: y=k(x+2)$  ( $k>0$ ) 与抛物线  $y^2=4x$  交于点  $A, B$ , 以线段  $AB$  为直径的圆经过定点  $D(2, 0)$ , 则  $|AB| =$

A. 4

B. 6

C. 8

D. 10

21. 在菱形  $ABCD$  中,  $AB=2$ ,  $\angle A=60^\circ$ , 将  $\triangle BCD$  绕对角线  $BD$  所在直线旋转至  $BPD$ , 使得  $AP=\sqrt{6}$ , 则三棱锥  $P-ABD$  的外接球的表面积为

A.  $\frac{8\pi}{3}$

B.  $\frac{20\pi}{3}$

C.  $\frac{20\sqrt{15}\pi}{27}$

D.  $\frac{25\pi}{3}$

22. 若存在  $x_0 \in [-1, 2]$ , 使不等式  $x_0 + (e^2 - 1)\ln a \geq \frac{2a}{e^{x_0}} + e^{x_0} - 2$  成立, 则  $a$  的取值范围是

A.  $[\frac{1}{2e}, e^2]$

B.  $[\frac{1}{e^2}, e^2]$

C.  $[\frac{1}{e^2}, e^4]$

D.  $[\frac{1}{e}, e^4]$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知  $\overrightarrow{AB}=(1,2)$ ,  $\overrightarrow{AC}=(2,t)$ ,  $|\overrightarrow{BC}|=1$ , 则实数  $t=$        

14. 已知  $(x+a)(x-2)^3$  的展开式中含  $x^3$  项的系数为  $-60$ , 则  $a=$        

15. 已知  $O$  为坐标原点, 直线  $y=x+2$  与双曲线  $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a>0, b>0)$  的两条渐近线从左往右顺次交于  $A, B$  两点. 若  $2|OA|=|OB|$ , 则双曲线  $C$  的离心率为       .

16.  $\triangle ABC$  中, 角  $A, B, C$  所对的边分别为  $a, b, c$ . 若  $(2a-c)\cos B = b\cos C$ , 且  $b=\sqrt{3}$ , 则  $\triangle ABC$  周长的最大值为       .

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生依据要求作答。

( ) 必考题：共 60 分。

17. (12 分)

某商店销售某种产品，为了解客户对该产品的评价，现随机调查了 200 名客户，其评价结果为“一般”或“良好”，并得到如下列联表：

|    | 一般 | 良好  | 合计  |
|----|----|-----|-----|
| 男  | 20 | 100 | 120 |
| 女  | 30 | 50  | 80  |
| 合计 | 50 | 150 | 200 |

(1) 通过计算判断，有没有 99% 的把握认为客户对该产品的评价结果与性别有关系？

(2) 该商店在春节期间开展促销活动，该产品共有如下两个销售方案。

方案一：按原价的 8 折销售；

方案二：顾客购买该产品时，可在一个装有 4 张“每满 200 元少 80 元”，6 张“每满 200 元少 40 元”共 10 张优惠券的不透明箱子中，随机抽取 1 张，购买时按照所抽取的优惠券进行优惠。

已知该产品原价为 260 (元/件)。顾客甲若想采用方案二的方式购买一件产品，估计顾客甲需支付的金额；你认为顾客甲选择哪种购买方案较为合理？

附表及公式：

| $P(K^2 \geq k_0)$ | 0.15  | 0.10  | 0.05  | 0.025 | 0.010 |
|-------------------|-------|-------|-------|-------|-------|
|                   | 2.072 | 2.706 | 3.841 | 5.024 | 6.635 |

其中  $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$ ,  $n=a+b+c+d$ .

18. (12 分)

已知数列  $\{a_n\}$  是公差为 2 的等差数列,  $a_1 + a_3 = a_4$ .  $\{b_n\}$  是公比大于 0 的等比数列,  $b_1 = 3$ ,  $b_3 - b_2 = 18$ .

(1) 求数列  $\{a_n\}$  和  $\{b_n\}$  的通项公式；

(2) 若数列  $\{c_n\}$  满足  $c_n = a_n b_n$ , 求  $\{c_n\}$  的前  $n$  项和  $T_n$ .

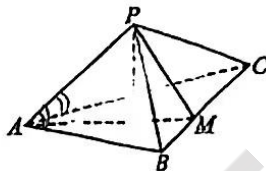


19. (12 分)

如图,在三棱锥  $P-ABC$  中,  $H$  为  $\triangle ABC$  的内心, 直线  $AH$  与  $BC$  交于  $M$ ,  $\angle PAB = \angle PAC$ ,  $\angle PCA = \angle PCB$ .

(1) 证明: 平面  $PAM \perp$  平面  $ABC$ ;

(2) 若  $AB \perp BC$ ,  $PA = AB = 3$ ,  $BC = 4$ , 求二面角  $M-PA-C$  的余弦值.



20. (12 分)

已知椭圆  $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  经过  $A(0, 1)$ ,  $T(-\frac{8}{5}, -\frac{3}{5})$  两点,  $M, N$  是椭圆  $E$  上异于  $T$  的两动点, 且  $\angle MAT = \angle NAT$ , 若直线  $AM, AN$  的斜率均存在, 并分别记为  $k_1, k_2$ .

(1) 求证:  $k_1 k_2$  为常数;

(2) 求  $\triangle AMN$  面积的最大值.

21. (12 分)

已知函数  $f(x) = ae^x - x^2$  有两个极值点  $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$ .

(1) 求  $a$  的取值范围;

(2) 若  $ex_1 + (e-2)x_2 \geq \lambda x_1 x_2$ , 求  $\lambda$  的取值范围.

(二) 选考题: 共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答, 如果多做, 则按所做的第一题记分.

22. [选修 4-4: 坐标系与参数方程] (10 分)

在直角坐标系  $xOy$  中, 直线  $l$  的参数方程为  $\begin{cases} x = 2 + \sqrt{3}t \\ y = t \end{cases}$  ( $t$  为参数). 以坐标原点  $O$  为极点,  $x$

轴的正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线  $C$  的极坐标方程为  $4\rho^2 \sin^2 \theta = 3(\rho^2 - 1)$ .

(1) 求  $C$  的直角坐标方程;

(2) 设直线  $l$  与曲线  $C$  交于  $A, B$ , 求  $|AB|$ .

23. [选修 4-5: 不等式选讲] (10 分)

设函数  $f(x) = |2x - 3| + |2x + 1|$ .

(1) 解不等式  $f(x) \leq 6 - x$ ;

(2) 令  $f(x)$  的最小值为  $T$ , 正数  $x, y, z$  满足  $x + y + 2z = T$ ,

证明:  $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{2}{z+2} \geq \frac{8}{5}$ .