

文科数学参考解答及评分参考

1. C 2. A 3. C 4. B 5. B 6. A 7. D 8. D 9. B 10. C 11. C 12. A

13. $\frac{\sqrt{10}}{3}$ 14. 2 15. $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ 16. $3+2\sqrt{2}$

17. 解析：(1)由题，

$$\text{得 } K^2 = \frac{200 \times (20 \times 50 - 30 \times 100)^2}{50 \times 150 \times 120 \times 80} = \frac{100}{9} \approx 11.11 > 6.635, \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

因此，有 99% 的把握认为客户对该产品的评价结果与性别有关系. $\dots\dots\dots 6 \text{ 分}$ (2)这 6 名客户中男性有 4 人，记为 A_1, A_2, A_3, A_4 ，女性有 2 名，记为 B_1, B_2 . $\dots\dots\dots 8 \text{ 分}$

从这 6 名客户中选取 2 名客户的所有基本事件有： $(A_1, A_2), (A_1, A_3), (A_1, A_4), (A_1, B_1),$
 $(A_1, B_2), (A_2, A_3), (A_2, A_4), (A_2, B_1), (A_2, B_2), (A_3, A_4), (A_3, B_1), (A_3, B_2), (A_4, B_1),$
 $(A_4, B_2), (B_1, B_2)$ ，共 15 个. $\dots\dots\dots 10 \text{ 分}$

其中，至少有一名女性客户的基本事件有 9 个. $\dots\dots\dots 11 \text{ 分}$ 所以，抽取的 2 名客户中至少有 1 名女性客户的概率为 $\frac{9}{15}$ ，即 $\frac{3}{5}$. $\dots\dots\dots 12 \text{ 分}$ 18. 解析：(1)由已知 $a_1 + a_1 + 2 + a_1 + 4 = 12$ ，所以 $a_1 = 2$.所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 2n$. $\dots\dots\dots 2 \text{ 分}$ 设等比数列 $\{b_n\}$ 的公比为 q ，由 $b_1 = 3, b_3 - b_2 = 18$ 则 $3q^2 - 3q = 18$ ，即 $q^2 - q - 6 = 0$ ，解得 $q = 3, q = -2$ (舍去)，所以数列 $\{b_n\}$ 的通项公式为 $b_n = 3^n$. $\dots\dots\dots 6 \text{ 分}$ (2)由(1)得 $c_n = \frac{4}{2n \cdot 2(n+1)} - 3^n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + 3^n$. $\dots\dots\dots 8 \text{ 分}$

$$\text{所以 } T_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + (3 + 3^2 + \dots + 3^n)$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1} + \frac{3(1-3^n)}{1-3}$$

$$= \frac{n}{n+1} + \frac{3^{n+1}-3}{2}.$$

所以 $T_n = \frac{n}{n+1} + \frac{3^{n+1}-3}{2}$. $\dots\dots\dots 12 \text{ 分}$ 19. 解析：(1)证明：设 $PN \perp$ 平面 ABC 于点 N ，过 N 作 $NE \perp AB$ 于 $E, NF \perp AC$ 于 F ，连接 PE, PF .

因为 $PN \perp$ 平面 ABC , $ABC \subset$ 平面 ABC , 所以 $PN \perp AB$.

又因为 $NE \perp AB$, 所以 $AB \perp$ 平面 PNE , 所以 $AB \perp PE$, 同理 $AC \perp PF$ 2 分

在 $Rt\triangle PAE$, $Rt\triangle PAF$ 中, $\angle PAE = \angle PAF$, $PA = PA$,

故 $\triangle PAE \cong \triangle PAF$, 所以 $AF = AE$.

在 $Rt\triangle ANE$, $Rt\triangle ANF$ 中, $AF = AE$, $AN = AN$,

故 $\triangle ANE \cong \triangle ANF$, 所以 $NE = NF$ 4 分

即 N 到 AB , AC 的距离相等, 同理 N 到 BC , AC 的距离相等,

故 N 为 $\triangle ABC$ 的内心, N 与 H 重合.

所以 $PH \perp$ 平面 ABC .

又因为 $PH \subset$ 平面 APM , 所以平面 $PAM \perp$ 平面 ABC 6 分

(2) 设 $\triangle ABC$ 的内切圆半径为 r , 则 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 4 \times 3 = \frac{1}{2} r(3+4+5)$, 故 $r=1$.

所以 $AH = \sqrt{r^2 + AE^2} = \sqrt{5}$, $PH = \sqrt{AP^2 - AH^2} = 2$ 8 分

因为 H 为 $\triangle ABC$ 的内心, 所以 AH 平分 $\angle BAC$,

所以 $\frac{BM}{CM} = \frac{AB}{AC} = \frac{3}{5}$, $BM + CM = 4$, 所以 $CM = \frac{5}{2}$,

故 $\triangle AMC$ 的面积为 $\frac{1}{2} CM \cdot AB = \frac{15}{4}$ 10 分

由于点 P 到平面 ABC 的距离为 $PH = 2$.

故三棱锥 $M-PAC$ 的体积为 $\frac{1}{3} S_{\triangle AMC} \cdot PH = \frac{5}{2}$ 12 分

20. 解析: (1) 椭圆经过点 A, T , 代入椭圆 E 的方程, 得 $\begin{cases} b^2 = 1, \\ \frac{64}{25a^2} + \frac{9}{25b^2} = 1, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a^2 = 4, \\ b^2 = 1. \end{cases}$

所以椭圆 E 的方程为: $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 2 分

由 $\angle MAT = \angle NAT$ 知 AM 与 AN 关于直线 $AT: y = x + 1$ 对称,

在 AM 上任取一点 $P_0(x_0, y_0)$,

则 P_0 关于直线 $y = x + 1$ 对称的点为 $P'_0(y_0 - 1, x_0 + 1)$, 4 分

从而 $k_1 = k_{AP_0} = \frac{y_0 - 1}{x_0}$, $k_2 = k_{AP'_0} = \frac{(x_0 + 1) - 1}{y_0 - 1}$,

于是 $k_1 k_2 = 1$ 5 分

(2) 设点 $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$, $AM: y = k_1 x + 1$,

由 $\begin{cases} y = k_1 x + 1, \\ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1, \end{cases}$ 得 $(4k_1^2 + 1)x^2 + 8k_1 x = 0$, 所以 $x_1 = -\frac{8k_1}{4k_1^2 + 1}$.

$$\text{从而 } y_1 = k_1 x_1 + 1 = \frac{1-4k_1^2}{4k_1^2+1}.$$

$$\text{同理 } x_2 = -\frac{8k_2}{4k_2^2+1}, y_2 = \frac{1-4k_2^2}{4k_2^2+1}.$$

$$\text{由(1)有 } k_1 k_2 = 1, \text{ 故 } x_2 = -\frac{8k_1}{4+k_1^2}, y_2 = \frac{k_1^2-4}{4+k_1^2}, \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$\text{为方便,记 } k_1 = k, \text{ 则 } k_{MN} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{\frac{1-4k^2}{4k^2+1} - \frac{k^2-4}{4+k^2}}{-\frac{8k}{4k^2+1} - \frac{-8k}{4+k^2}} = \frac{8-8k^4}{8k(3k^2-3)} = -\frac{k^2+1}{3k} \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$MN: y - y_1 = k_{MN}(x - x_1),$$

$$\text{所以 } y - \frac{1-4k^2}{4k^2+1} = -\frac{k^2+1}{3k} \left(x - \frac{-8k}{4k^2+1} \right),$$

$$\text{即 } y = -\frac{k^2+1}{3k}x - \frac{8(k^2+1)}{3(4k^2+1)} + \frac{1-4k^2}{4k^2+1} = -\frac{k^2+1}{3k}x - \frac{5}{3} \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$

$$\text{由此可知,当 } k \text{ 变化时,直线 } MN \text{ 过定点 } \left(0, -\frac{5}{3}\right). \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

21. 解析:(1)由题 $f(x) = ae^x - x^2$ 得 $f'(x) = ae^x - 2x$,

因为函数 $f(x)$ 有两个极值点,

所以方程 $f'(x) = 0$ 有两个不同实数根,即方程 $a = \frac{2x}{e^x}$ 有两个不同实数根, $\dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

$$\text{设 } u(x) = \frac{2x}{e^x}, \text{ 则 } u'(x) = \frac{2-2x}{e^x},$$

知 $x < 1$ 时, $u'(x) > 0$, 则 $u(x)$ 单调递增, $x > 1$ 时, $u'(x) < 0$, 则 $u(x)$ 单调递减,

$$\text{所以, } x = 1 \text{ 时, } u(x) \text{ 取得极大值 } u(1) = \frac{2}{e},$$

又 $x < 0$ 时, $u(x) < 0$; $x > 0$ 时, $u(x) > 0$, 且 $x \rightarrow +\infty$ 时, $u(x) \rightarrow 0$,

所以,方程 $a = \frac{2x}{e^x}$ 有两个不同实数根时,有 $0 < a < \frac{2}{e}$.

即 $f(x)$ 有两个极值点时, a 的取值范围是 $\left(0, \frac{2}{e}\right)$. $\dots\dots\dots 5 \text{ 分}$

(2)由(1)可知, $f(x)$ 的两个极值点 x_1, x_2 是方程 $ae^x - 2x = 0$ 的两根,

$$\text{且 } 0 < a < \frac{2}{e}, 0 < x_1 < 1 < x_2, \text{ 则有 } ae^{x_1} = 2x_1 > 0, ae^{x_2} = 2x_2 > 0,$$

$$\text{两式相除,得 } e^{x_2-x_1} = \frac{x_2}{x_1}, \text{ 即有 } x_2 - x_1 = \ln \frac{x_2}{x_1} > 0,$$

$$\text{由 } x_1 + \lambda x_2 \geq 2x_1 x_2 \text{ 得, } (x_2 - x_1)(x_1 + \lambda x_2) \geq 2x_1 x_2 \ln \frac{x_2}{x_1}, \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

所以 $\lambda \geq \frac{2\ln t + \frac{1}{t} - 1}{t-1}$, 令 $t = \frac{x_2}{x_1} \geq 3$,

令 $h(t) = \frac{2\ln t + \frac{1}{t} - 1}{t-1} (t \geq 3)$, 则 $h'(t) = \frac{3 - \frac{4}{t} + \frac{1}{t^2} - 2\ln t}{(t-1)^2} (t \geq 3)$,

令 $\varphi(t) = 3 - \frac{4}{t} + \frac{1}{t^2} - 2\ln t (t \geq 3)$,

则 $\varphi'(t) = -\frac{2}{t} + \frac{4}{t^2} - \frac{2}{t^3} = \frac{-2t^2 + 4t - 2}{t^3} = \frac{-2(t-1)^2}{t^3} < 0$, 9 分

所以 $\varphi(t)$ 单调递减, 又 $\varphi(3) = 3 - \frac{4}{3} + \frac{1}{3^2} - 2\ln 3 = \frac{16 - 18\ln 3}{9} < 0$,

故 $t \geq 3$ 时, $\varphi(t) < 0$, 则 $h(t) = \frac{2\ln t + \frac{1}{t} - 1}{t-1}$ 单调递减,

则 $h(t) \leq h(3) = \ln 3 - \frac{1}{3}$, 故 $\lambda \geq \ln 3 - \frac{1}{3}$.

所以 λ 的最小值为 $\ln 3 - \frac{1}{3}$ 12 分

22. 解析: (1) 将 $\begin{cases} x = \rho \cos \theta, \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}$ 代入 $4\rho^2 \sin^2 \theta = 3(\rho^2 - 1)$, 得

$$4y^2 = 3(x^2 + y^2) - 3,$$

即曲线 C 的直角坐标方程为: $3x^2 - y^2 - 3 = 0$ 5 分

(2) 直线 l 的参数方程可改写为 $\begin{cases} x = 2 + \frac{\sqrt{3}}{2}t, \\ y = \frac{1}{2}t \end{cases} (t \text{ 为参数}),$ 6 分

代入曲线 C 的方程, 有 $3\left(2 + \frac{\sqrt{3}}{2}t\right)^2 - \left(\frac{1}{2}t\right)^2 = 3$,

整理得 $2t^2 + 6\sqrt{3}t + 9 = 0$ 7 分

从而 $t_1 + t_2 = -3\sqrt{3}$, $t_1 t_2 = \frac{9}{2}$, 8 分

所以 $|AB| = |t_1 - t_2| = \sqrt{(t_1 + t_2)^2 - 4t_1 t_2} = 3$ 10 分

23. 解析: (1) 当 $x < -\frac{1}{2}$ 时, $f(x) = -2x + 3 - 2x - 1 \leq 6 - x$, 解得 $-\frac{4}{3} \leq x < -\frac{1}{2}$;

当 $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}$ 时, $f(x) = -2x + 3 + 2x + 1 \leq 6 - x$, 解得 $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}$;

当 $x > \frac{3}{2}$ 时, $f(x) = 2x - 3 + 2x + 1 \leq 6 - x$, 解得 $\frac{3}{2} < x \leq \frac{8}{5}$,

综上所述,原不等式的解集为 $\left\{x \mid -\frac{4}{3} \leq x \leq \frac{8}{5}\right\}$ 5 分

(2)由题 $f(x) = |2x-3| + |2x+1| \geq |2x-3-(2x+1)| = 4$, 当且仅当 $(2x-3)(2x+1) \leq 0$ 即 $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}$ 时取“等号”, 故 $f(x)$ 的最小值 $T=4$, 即 $x+y+2z=4$.

证法 1:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{2}{z+2} &= \frac{1}{10}[(x+1) + (y+1) + 2(z+2)] \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{2}{z+2} \right) \\ &\geq \frac{1}{10} \left[\sqrt{(x+1) \cdot \frac{1}{x+1}} + \sqrt{(y+1) \cdot \frac{1}{y+1}} + \sqrt{2(z+2) \cdot \frac{2}{z+2}} \right]^2 = \frac{16}{10} = \frac{8}{5}, \end{aligned}$$

当且仅当 $(x+1)^2 = (y+1)^2 = (z+2)^2$, 即 $x=y=\frac{3}{2}, z=\frac{1}{2}$ 时取等号.

所以, $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{2}{z+2} \geq \frac{8}{5}$ 10 分

证法 2:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{2}{z+2} &= \frac{1}{10}[(x+1) + (y+1) + 2(z+2)] \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{2}{z+2} \right) \\ &= \frac{1}{10} \left[6 + \frac{y+1}{x+1} + \frac{x+1}{y+1} + \frac{2(z+2)}{x+1} + \frac{2(x+1)}{z+2} + \frac{2(z+2)}{y+1} + \frac{2(y+1)}{z+2} \right] \\ &\geq \frac{1}{10} \left[6 + 2\sqrt{\frac{y+1}{x+1} \cdot \frac{x+1}{y+1}} + 2\sqrt{\frac{2(z+2)}{x+1} \cdot \frac{2(x+1)}{z+2}} + 2\sqrt{\frac{2(z+2)}{y+1} \cdot \frac{2(y+1)}{z+2}} \right] = \frac{8}{5}. \end{aligned}$$

当且仅当 $\frac{y+1}{x+1} = \frac{x+1}{y+1}, \frac{2(z+2)}{x+1} = \frac{2(x+1)}{z+2}, \frac{2(z+2)}{y+1} = \frac{2(y+1)}{z+2}$ 取等号,

即 $x=y=\frac{3}{2}, z=\frac{1}{2}$ 时取等号.

所以, $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{2}{z+2} \geq \frac{8}{5}$ 10 分