

秘密 ★ 启用前【考试时间：2023 年 3 月 28 日 15:00~17:00】

自贡市高 2023 届第二次诊断性考试

数 学(文史类)

注意事项：

- 答卷前，考生务必将自己的姓名、座位号和准考证号填写在答题卡上。
- 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
- 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

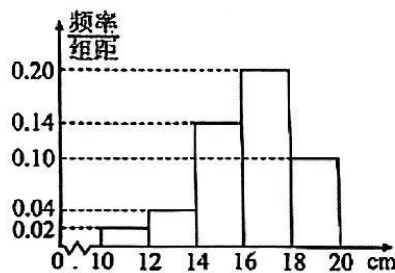
1. 已知集合 $A = \{x | (x+3)(x-2) \leq 0\}$, $B = \{x | x \leq 1\}$, 则 $A \cap B =$

- A. $\{x | -3 \leq x < 2\}$ B. $\{x | -3 \leq x < 1\}$
C. $\{x | -3 \leq x \leq 1\}$ D. $\{x | 1 < x \leq 2\}$

2. $\frac{2+i}{2i} =$

- A. $\frac{1}{2} - i$ B. $1 - \frac{1}{2}i$ C. $\frac{1}{2} + i$ D. $\frac{3}{4} - \frac{1}{4}i$

3. 某乡镇为推动乡村经济发展，优化产业结构，逐步打造高品质的农业生产，在某试验区种植了某农作物。为了解该品种农作物长势，在实验区随机选取了 100 株该农作物苗，经测量，其高度（单位：cm）均在区间 $[10, 20]$ 内，按照 $[10, 12)$, $[12, 14)$, $[14, 16)$, $[16, 18)$, $[18, 20]$ 分成 5 组，制成如图所示的频率分布直方图，记高度不低于 16 cm 的为“优质苗”。



则所选取的农作物样本苗中，“优质苗”株数为

- A. 20 B. 40 C. 60 D. 88

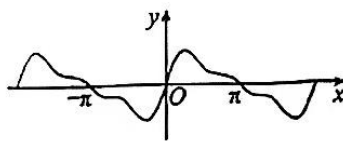
4. 已知 $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$, $\cos 2\alpha + 2\sin 2\alpha = 1$, 则 $\tan \alpha =$

- A. 3 B. 2 C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{3}$

5. 过直线 $l: x+y-5=0$ 上的点作圆 $C: (x-1)^2 + (y+2)^2 = 6$ 的切线，则切线段长的最小值为

- A. $\sqrt{6}$ B. $2\sqrt{3}$ C. $\sqrt{15}$ D. $3\sqrt{2}$

6. 数学与音乐有着紧密的关联,我们平时听到的乐音一般来说并不是纯音,而是由多种波叠加而成的复合音.如图为某段乐音的图象,则该段乐音对应的函数解析式可以为

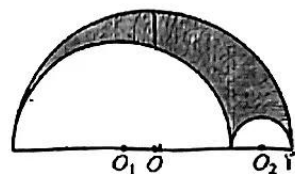


- A. $y = \sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x$ B. $y = \sin x - \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{1}{3}\sin 3x$
- C. $y = \sin x + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{3}\cos 3x$ D. $y = \cos x + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{3}\cos 3x$
7. 已知函数 $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2$, 则 $f(x)$
- A. 有 2 个极大值点 B. 有 1 个极大值点和 1 个极小值点
- C. 有 2 个极小值点 D. 有且仅有一个极值点
8. 将函数 $f(x) = \sqrt{3}\sin x - \cos x$ 的图象上的所有点向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度, 得到的图象对应的函数可以是
- A. $y = 2\sin x$ B. $y = 2\cos x$ C. $y = -2\sin x$ D. $y = -2\cos x$
9. 已知四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的底面是正方形, $AB=2$, $AA_1=2\sqrt{2}$, 点 B_1 在底面 $ABCD$ 的射影为 BC 中点 H , 则点 C_1 到平面 $ABCD$ 的距离为
- A. $\sqrt{6}$ B. $\sqrt{7}$ C. $2\sqrt{2}$ D. 3
10. 已知定点 $D(2,0)$, 直线 $l: y=k(x+2) (k>0)$ 与抛物线 $y^2=4x$ 交于两点 A, B , 若 $\angle ADB=90^\circ$, 则 $|AB| =$
- A. 4 B. 6 C. 8 D. 10
11. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=AC=2$, $BC=2\sqrt{3}$, D 为 BC 的中点, 将 $\triangle ACD$ 绕 AD 旋转至 APD , 使得 $BP=\sqrt{3}$, 则三棱锥 $P-ABD$ 的外接球表面积为
- A. $\frac{8\sqrt{2}\pi}{3}$ B. $\frac{5\sqrt{5}\pi}{6}$ C. 5π D. 8π
12. 已知函数 $f(x) = \frac{x+1}{e^x}$, 若过点 $P(-1, m)$ 可以作曲线 $y=f(x)$ 三条切线, 则 m 的取值范围是
- A. $(0, \frac{4}{e})$ B. $(0, \frac{8}{e})$ C. $(-\frac{1}{e}, \frac{4}{e})$ D. $(\frac{1}{e}, \frac{8}{e})$

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{9} - y^2 = 1$, 则 C 的离心率为_____.
14. 已知 $\overrightarrow{AB} = (1, 2)$, $\overrightarrow{AC} = (2, t)$, $|\overrightarrow{BC}| = 1$, 则实数 $t =$ _____.
15. $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c . 若 $(2a-c)\cos B = b\cos C$, 且 $b = \sqrt{3}$, 则 $\triangle ABC$ 面积的最大值为_____.

- 16.《定理汇编》记载了诸多重要的几何定理,其中有一些定理是关于鞋匠刀形的,即由在同一直线上同侧的三个半圆所围成的图形,其被阿基米德称为鞋匠刀形.如图所示,三个半圆的圆心分别为 O, O_1, O_2 , 半径分别为 R, r_1, r_2 (其中 $R > r_1 > r_2$), 在半圆 O 内随机取一点, 此点取自图中鞋匠刀形(阴影部分)的概率为 $\frac{1}{4}$, 则 $\frac{r_1}{r_2} =$ _____



三、解答题:共 70 分。解答应写出文字说明,证明过程或演算步骤。第 17~21 题为必考题,每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题,考生依据要求作答。

(一)必考题:共 60 分。

17. (12 分)

某商店销售某种产品,为了解客户对该产品的评价,现随机调查了 200 名客户,其评价结果为“一般”或“良好”,并得到如下列联表:

	一般	良好	合计
男	20	100	120
女	30	50	80
合计	50	150	200

(1)通过计算判断,有没有 99% 的把握认为客户对该产品的评价结果与性别有关系?

(2)利用样本数据,在评价结果为“良好”的客户中,按照性别用分层抽样的方法抽取了 6 名客户.若从这 6 名客户中随机选择 2 名进行访谈,求所抽取的 2 名客户中至少有 1 名女性的概率.

附表及公式:

$P(K^2 \geq k_0)$	0.15	0.10	0.05	0.025	0.010
k_0	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635

其中 $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$, $n = a + b + c + d$.

18. (12 分)

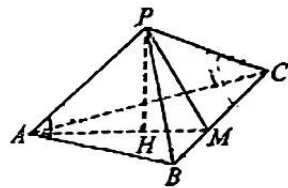
已知数列 $\{a_n\}$ 是公差为 2 的等差数列,其前 3 项的和为 12 $\{b_n\}$ 是公比大于 0 的等比数列, $b_1 = 3, b_3 - b_2 = 18$.

(1)求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2)若数列 $\{c_n\}$ 满足 $c_n = \frac{4}{a_n a_{n+1}} + b_n$, 求 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

19. (12 分)

如图,在三棱锥 $P-ABC$ 中, H 为 $\triangle ABC$ 的内心, 直线 AH 与 BC 交于 M , $\angle PAB = \angle PAC$, $\angle PCA = \angle PCB$.



(1) 证明: 平面 $PAM \perp$ 平面 ABC ;

(2) 若 $AB \perp BC$, $PA = AB = 3$, $BC = 4$, 求三棱锥 $M-PAC$ 的体积.

20. (12 分)

已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 经过 $A(0, 1)$, $T(-\frac{8}{5}, -\frac{3}{5})$ 两点, M, N 是椭圆 E 上异于 T 的两动点, 且 $\angle MAT = \angle NAT$, 直线 AM, AN 的斜率均存在, 并分别记为 k_1, k_2 .

(1) 求证: $k_1 k_2$ 为常数;

(2) 证明直线 MN 过定点.

21. (12 分)

已知函数 $f(x) = ae^x - x^2$ 有两个极值点 x_1, x_2 .

(1) 求 a 的取值范围;

(2) 若 $x_2 \geq 3x_1$ 时, 不等式 $x_1 + \lambda x_2 \geq 2x_1 x_2$ 恒成立, 求 λ 的最小值.

(二) 选考题: 共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答, 如果多做, 则按所做的第一题记分.

22. [选修 4-4: 坐标系与参数方程] (10 分)

在直角坐标系 xOy 中, 直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x = 2 + \sqrt{3}t, \\ y = t \end{cases}$ (t 为参数). 以坐标原点 O 为极点,

x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线 C 的极坐标方程为 $4\rho^2 \sin^2 \theta = 3(\rho^2 - 1)$.

(1) 求 C 的直角坐标方程;

(2) 设直线 l 与曲线 C 交于 A, B , 求 $|AB|$.

23. [选修 4-5: 不等式选讲] (10 分)

设函数 $f(x) = |2x - 3| + |2x + 1|$.

(1) 解不等式 $f(x) \leq 6 - x$;

(2) 令 $f(x)$ 的最小值为 T , 正数 x, y, z 满足 $x + y + 2z = T$,

证明: $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{2}{z+2} \geq \frac{8}{5}$.