

南充市高 2023 届高三适应性考试（二诊）

理科数学参考答案

一. 选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
C	A	B	C	B	D	A	C	B	D	D	A

二. 填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 0.6 14. 1 15. (0.2) 16. ①②③

三. 解答题

17. (1) 解：若选①：因为数列 $\{a_n\}$ 是等比数列，设公比为 q . $S_2 = 6$ ，且 $4a_2$ ， $2a_3$ ， a_4 成等差数列.

$$\text{所以 } \begin{cases} a_1 + a_1q = 6 \\ 4a_1q + a_1q^3 = 4a_1q^2 \end{cases}, \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\text{解得 } a_1 = 2, q = 2, \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } a_n = 2 \times 2^{n-1} = 2^n; \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

若选②：因为数列 $\{a_n\}$ 是递增的等比数列， $a_1a_4 = 32$ ， $a_2 + a_3 = 12$.

$$\text{所以 } \begin{cases} a_1a_4 = a_2a_3 = 32 \\ a_2 + a_3 = 12 \end{cases}, \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } a_2 = 4, a_3 = 8, q = \frac{a_3}{a_2} = 2, \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } a_n = a_2q^{n-2} = 4 \times 2^{n-2} = 2^n; \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$(2) \text{ 证明：由 (1) 知 } b_n = \frac{1}{(\log_2 a_n)(\log_2 a_{n+1})} = \frac{1}{(\log_2 2^n)(\log_2 2^{n+1})} = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1},$$

$$\text{所以 } T_n = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}, \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

因为 $\frac{1}{n+1} > 0$,

所以 $1 - \frac{1}{n+1} < 1$,11 分

即 $T_n < 1$ 12 分

18.解: (1) 由题意可得 X 的所有可能取值为 10, 15, 20, 25, 30,

$$P(X=10) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4},$$

$$P(X=15) = 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3},$$

$$P(X=20) = 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{5}{18},$$

$$P(X=25) = 2 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{9},$$

$$P(X=30) = \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{36}, \text{4 分}$$

则 X 的分布列为

X	10	15	20	25	30
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{36}$

$$\text{故 } E(X) = 10 \times \frac{1}{4} + 15 \times \frac{1}{3} + 20 \times \frac{5}{18} + 25 \times \frac{1}{9} + 30 \times \frac{1}{36} = \frac{50}{3} \text{6 分}$$

(2) 由题意可得列联表如下:

	有蛀牙	无蛀牙	合计
爱吃甜食	90	30	120
不爱吃甜食	30	50	80
合计	120	80	200

.....3 分

$$\text{所以 } K^2 = \frac{200(90 \times 50 - 30 \times 30)^2}{120 \times 80 \times 120 \times 80} = 28.125 > 7.879, \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$

根据临界值表可知，有 99.5% 的把握认为“爱吃甜食”与青少年“蛀牙”有关。……12 分

19. (1) 证明：连接 BD 交 AC 于 O ，连接 PO 。

因为底面 $ABCD$ 是边长为 2 的菱形，所以 $BD \perp AC$ ，……2 分

因为 O 是 BD 中点， $PB = PD$ ，

所以 $BD \perp PO$ 。

因为 $AC \cap PO = O$ ， $AC, PO \subset$ 平面 PAC ，……4 分

所以 $BD \perp$ 平面 PAC ，……5 分

(2) 如图，取线段 BC 的中点 H ，连接 AH ，易知 $AH \perp AD$ 。

以 A 为坐标原点，分别以 AH, AD, AP 所在直线为 x 轴， y 轴， z 轴，建立如图的空间直角坐标系 $A-xyz$ ，则 $A(0,0,0)$ ， $B(\sqrt{3},-1,0)$ ， $C(\sqrt{3},1,0)$ ， $P(0,0,\sqrt{3})$ 。

$$\overrightarrow{BC} = (0,2,0), \overrightarrow{CP} = (-\sqrt{3},-1,\sqrt{3}) \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

设 M 点坐标为 (x_M, y_M, z_M)

$$\text{由 } \overrightarrow{CM} = \lambda \overrightarrow{CP} (0 \leq \lambda \leq 1), \text{ 则有 } (x_M - \sqrt{3}, y_M - 1, z_M) = (-\sqrt{3}\lambda, -\lambda, \sqrt{3}\lambda),$$

$$\text{解得 } M(\sqrt{3} - \sqrt{3}\lambda, 1 - \lambda, \sqrt{3}\lambda), \text{ 进而 } \overrightarrow{AM} = (\sqrt{3} - \sqrt{3}\lambda, 1 - \lambda, \sqrt{3}\lambda).$$

设平面 PBC 的法向量为 $\vec{m} = (x, y, z)$ 。

$$\text{由 } \begin{cases} \vec{m} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \vec{m} \cdot \overrightarrow{PC} = 0 \end{cases}, \text{ 得 } \begin{cases} 2y = 0 \\ \sqrt{3}x + y - \sqrt{3}z = 0 \end{cases}, \text{ 取}$$

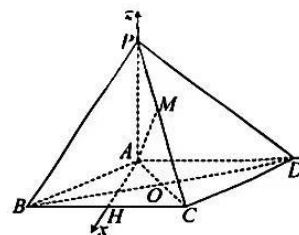
$$\vec{m} = (1, 0, 1) \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

设直线 AM 与平面 PBC 所成的角为 θ ，则

$$\sin \theta = |\cos \langle \overrightarrow{AM}, \vec{m} \rangle| = \frac{|\vec{m} \cdot \overrightarrow{AM}|}{|\vec{m}| \cdot |\overrightarrow{AM}|} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{(\sqrt{3}\lambda)^2 + (1-\lambda)^2 + (\sqrt{3}-\sqrt{3}\lambda)^2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2(7\lambda^2 - 8\lambda + 4)}} = \frac{\sqrt{14}}{4}$$

$$\text{化简得 } (7\lambda - 4)^2 = 0, \text{ 解得 } \lambda = \frac{4}{7}, \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$

$$\text{所以满足条件的 } M \text{ 点存在. 满足 } \overrightarrow{CM} = \frac{4}{7} \overrightarrow{CP} \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$



20. (1) 解：由题知 $\begin{cases} AB = 2a = 4 \\ [S_{\Delta PAB}]_{\max} = \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot b = 2 \end{cases}$ 2 分

得 $\begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases}$ 3 分

故椭圆 M 的标准方程为： $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 4 分

(2) 方法一：因为点 $P(x_0, y_0)$ 在椭圆 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 上，

所以 $\frac{x_0^2}{4} + y_0^2 = 1$, ($y_0 \neq 0$) 5 分

设切线 l 方程为： $y - y_0 = k(x - x_0)$, 即 $y = kx + y_0 - kx_0$.

令 $m = y_0 - kx_0$, 则 $y = kx + m$.

由 $\begin{cases} \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \\ y = kx + m \end{cases}$, 得 $x^2 + 4(kx + m)^2 - 4 = 0$.

$(4k^2 + 1)x^2 + 8kmx + 4(m^2 - 1) = 0$

因为直线 l 与椭圆 M 相切，

所以 $\Delta = (8km)^2 - 4(4k^2 + 1) \cdot (4m^2 - 4) = 0$.

所以 $4k^2 + 1 = m^2$ 7 分

代入 $m = y_0 - kx_0$, 得 $4k^2 + 1 = (y_0 - kx_0)^2$, 即 $(4 - x_0^2)k^2 + 2x_0y_0 \cdot k + 1 - y_0^2 = 0$.

因为 $\frac{x_0^2}{4} + y_0^2 = 1$, 所以 $4 - x_0^2 = 4y_0^2$, $1 - y_0^2 = \frac{x_0^2}{4}$.

所以 $4y_0^2k^2 + 2x_0y_0 \cdot k + \frac{x_0^2}{4} = 0$, 有 $(2y_0k + \frac{x_0}{2})^2 = 0$.

由于 $y_0 \neq 0$, 所以 $k = -\frac{x_0}{4y_0}$.

故切线 l 方程为： $y - y_0 = -\frac{x_0}{4y_0}(x - x_0)$, 即 $\frac{x_0x}{4} + y_0y = 1$ 9 分

令 $x = -2$ 得 $D(-2, \frac{1 + \frac{x_0}{2}}{y_0})$, 则直线 BD 为： $y = \frac{1 + \frac{x_0}{2}}{-4y_0}(x - 2)$ ①

令 $x = 2$, 得 $C(2, \frac{1 - \frac{x_0}{2}}{y_0})$, 则直线 AC 为： $y = \frac{1 - \frac{x_0}{2}}{4y_0}(x + 2)$ ②

由①×②知： $y^2 = \frac{1-x_0^2}{-16y_0^2}(x^2-4) = \frac{1}{-16}(x^2-4)$

点 N 的轨迹方程为 $\frac{x^2}{4} + 4y^2 = 1, (y \neq 0)$11 分

由椭圆定义知：存在定点 $F_1\left(-\frac{\sqrt{15}}{2}, 0\right), F_2\left(\frac{\sqrt{15}}{2}, 0\right)$ ，使得 $|NF_1| + |NF_2|$ 为定值 4.12 分

方法二：因为点 $P(x_0, y_0)$ 在椭圆 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 上，

则 $\frac{x_0^2}{4} + y_0^2 = 1$ ，即 $y_0^2 = 1 - \frac{x_0^2}{4}$.

又因为 $y^2 = 1 - \frac{x^2}{4}$ ，由于 $y \neq 0$ ，不妨设 $y > 0$.

取 $y = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{4 - x^2}$ ，

所以 $y' = \frac{-x}{2\sqrt{4-x^2}}$ ，

所以切线的斜率 $k = \frac{-x_0}{2\sqrt{4-x_0^2}}$ ，

所以切线 l 方程为

$y - y_0 = \frac{-x_0}{2\sqrt{4-x_0^2}}(x - x_0)$,7 分

由 $y_0^2 = 1 - \frac{x_0^2}{4}$ ，可得 $4 - x_0^2 = 4y_0^2$ ，已知 $y_0 > 0$ ，得 $\sqrt{4 - x_0^2} = 2y_0$

所以切线 l 方程为： $y - y_0 = \frac{-x_0}{4y_0}(x - x_0)$ ，即 $\frac{x_0x}{4} + y_0y = 1$9 分

令 $x = -2$ 得 $D(-2, \frac{1+x_0}{2y_0})$ ，则直线 BD 为： $y = \frac{1+x_0}{-4y_0}(x-2)$. ①

令 $x = 2$ ，得 $C(2, \frac{1-x_0}{2y_0})$ ，则直线 AC 为： $y = \frac{1-x_0}{4y_0}(x+2)$. ②

由①×②知： $y^2 = \frac{1-x_0^2}{-16y_0^2}(x^2-4) = \frac{1}{-16}(x^2-4)$

由对称性知：点 N 的轨迹方程为 $\frac{x^2}{4} + 4y^2 = 1, (y \neq 0)$11 分

由椭圆定义知：存在定点 $F_1\left(-\frac{\sqrt{15}}{2}, 0\right)$, $F_2\left(\frac{\sqrt{15}}{2}, 0\right)$, 使得 $|NF_1| + |NF_2|$ 为定值 4.12 分

说明:未经证明, 直接写出椭圆切线方程 $\frac{x_0x}{4} + y_0y = 1$, 扣 4 分.

20. 解: (1) 因为 $f(x) = e^x - mx^2$ ($m \in R$) 在 $(0, +\infty)$ 有 2 个极值点,

所以 $f'(x) = e^x - 2mx$ 在 $(0, +\infty)$ 有两个不同的异号零点.

$f'(x) = e^x - 2mx = 0$ 得 $\frac{e^x}{x} = 2m$, $x \in (0, +\infty)$. 显然 $m > 0$.

构造函数 $g(x) = \frac{e^x}{x} - 2m$, $x \in (0, +\infty)$. $g'(x) = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$

当 $0 < x < 1$ 时, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 在 $(0, 1)$ 单调递减;

当 $x > 1$ 时, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 单调递增.

所以 $g(x)_{\min} = g(1) = e - 2m < 0$, 得 $2m > e$4 分

当 $0 < x < 1$ 时, $e^x > 1$, $\frac{e^{\frac{1}{2m}}}{\frac{1}{2m}} = 2m \cdot e^{\frac{1}{2m}} > 2m$,

得 $g\left(\frac{1}{2m}\right) > 0$, 又 $g(1) < 0$, $g(x)$ 在 $(0, 1)$ 单调递减.

故存在唯一 $x_1 \in \left(\frac{1}{2m}, 1\right)$, 使得 $g(x_1) = 0$.

当 $x > 1$ 时, 由于函数 $g(x) = \frac{e^x}{x} - 2m$ 在 $(0, 1)$ 单调递减, $(1, +\infty)$ 单调递增.

所以 $y = \frac{e^x}{x}$ 在 $(0, 1)$ 单调递减, $(1, +\infty)$ 单调递增. 得 $\frac{e^x}{x} \geq e$.

所以 $e^x \geq ex$, 则 $e^{\frac{x}{2}} \geq \frac{ex}{2} > 0$, 得 $e^x = (e^{\frac{x}{2}})^2 \geq \frac{e^2 x^2}{4}$.

所以 $\frac{e^x}{x} \geq \frac{e^2 x}{4}$, $g(x) = \frac{e^x}{x} - 2m > \frac{e^2 x - 8m}{4}$

得 $g\left(\frac{8m}{e^2}\right) > 0$, 又 $g(1) < 0$, $g(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 单调递增.

故存在唯一 $x_2 \in \left(1, \frac{8m}{e^2}\right)$, 使得 $g(x_2) = 0$.

综上： m 的取值范围为 $(\frac{e}{2}, +\infty)$ 6 分

(2) 方法一： $h(x) = f'(x) - 2n \sin x = e^x - 2mx - 2n \sin x = 0$ 在 $(0, +\infty)$ 有零点，

得 $mx + n \sin x - \frac{e^x}{2} = 0$ ，此方程可以看作 mOn 坐标平面的直线 l 的方程。

则直线 l 上的任意一点 (m, n) 到原点的距离满足不等式：

$$\sqrt{m^2 + n^2} \geq \frac{e^x}{2\sqrt{x^2 + \sin^2 x}}$$

则 $m^2 + n^2 \geq \frac{e^{2x}}{4(x^2 + \sin^2 x)}$ 8 分

先证： $x^2 - \sin^2 x = (x + \sin x) \cdot (x - \sin x) > 0, x \in (0, +\infty)$ 。

构造函数 $p(x) = x + \sin x, x \in (0, +\infty)$ ，则 $p'(x) = 1 + \cos x \geq 0$ 。

$p(x) = x + \sin x$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递增。

$x > 0$ ，得 $p(x) = x + \sin x > p(0) = 0$ 。

即当 $x > 0$ 时 $x + \sin x > 0$ 。

同理：构造函数 $q(x) = x - \sin x, x \in (0, +\infty)$ ，则 $q'(x) = 1 - \cos x \geq 0$ 。

$q(x) = x - \sin x$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递增。

$x > 0$ ，得 $q(x) = x - \sin x > q(0) = 0$ 。

即当 $x > 0$ 时 $x - \sin x > 0$ 。

所以 $x^2 - \sin^2 x = (x + \sin x) \cdot (x - \sin x) > 0$ 10 分

$$m^2 + n^2 \geq \frac{e^{2x}}{4(x^2 + \sin^2 x)} > \frac{e^{2x}}{4(x^2 + x^2)} = \frac{1}{8} \left(\frac{e^x}{x}\right)^2 > \frac{e^2}{8} > \frac{2e}{8} = \frac{e}{4}$$

所以 $m^2 + n^2 > \frac{e}{4}$ 证毕12 分

方法二： $h(x) = f'(x) - 2n \sin x = e^x - 2mx - 2n \sin x = 0$ 在 $(0, +\infty)$ 有零点，

得 $mx + n \sin x - \frac{e^x}{2} = 0$ ，则由柯西不等式知： $\frac{e^x}{2} = mx + n \sin x \leq \sqrt{m^2 + n^2} \cdot \sqrt{x^2 + \sin^2 x}$

$$\sqrt{m^2 + n^2} \geq \frac{e^x}{2\sqrt{x^2 + \sin^2 x}}, \text{ 则 } m^2 + n^2 \geq \frac{e^{2x}}{4(x^2 + \sin^2 x)} \text{8 分}$$

先证： $x^2 - \sin^2 x > 0, x \in (0, +\infty)$ 。

构造函数 $h(x) = x^2 - \sin^2 x, x \in (0, +\infty)$ ，则 $h'(x) = 2x - 2 \sin x \cos x = 2x - \sin 2x$ 。

构造函数 $k(t) = t - \sin t$, $t \in (0, +\infty)$, 则 $k'(t) = 1 - \cos t \geq 0$.

$k(t) = t - \sin t$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递增. $2x > 0$, 得 $k(2x) > k(0) = 0$.

所以函数 $h(x) = x^2 - \sin^2 x$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递增.

当 $x > 0$ 时, $x^2 - \sin^2 x > 0$ 10 分

由 (1) 知 $\frac{e^x}{x} \geq e$.

$$m^2 + n^2 \geq \frac{e^{2x}}{4(x^2 + \sin^2 x)} > \frac{e^{2x}}{4(x^2 + x^2)} = \frac{1}{8} \left(\frac{e^x}{x}\right)^2 > \frac{e^2}{8} > \frac{2e}{8} = \frac{e}{4}$$

所以 $m^2 + n^2 > \frac{e}{4}$ 证毕. 12 分

$$\text{另: } m^2 + n^2 \geq \frac{e^{2x}}{4(x^2 + \sin^2 x)} > \frac{e^{2x}}{4(x^2 + |x| \cdot |\sin x|)} > \frac{e^{2x}}{4(x^2 + \frac{1}{4})} > \frac{1}{4} \left(\frac{e^x}{x}\right) \cdot \frac{e^x}{x+1} > \frac{1}{4} \cdot e \cdot e = \frac{e}{2}$$

阅卷说明:

考生如按以下方法, 请酌情给分.

① 当 $x > 0$ 时, $x^2 - \sin^2 x > 0$, 得 $|x| > |\sin x|$; ② 当 $x > 0$ 时, $e^x > x+1 > 1$, 得 $\frac{e^x}{x+1} > 1$.

22. 解: (1) 将 $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$ 代入曲线 E .

得 $\rho^2 = \rho - \rho \cos \theta$, $\rho \geq 0$ 即 $\rho = 1 - \cos \theta$.

所以 E 的极坐标方程为 $\rho = 1 - \cos \theta$ 5 分

(2) 不妨设 $P(\rho_1, \theta)$, $Q(\rho_2, \theta + \frac{\pi}{2})$,

即 $\rho_1 = 1 - \cos \theta$, $\rho_2 = 1 - \cos(\theta + \frac{\pi}{2}) = 1 + \sin \theta$,

$$\text{则 } |PQ| = \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2} = \sqrt{(1 - \cos \theta)^2 + (1 + \sin \theta)^2} = \sqrt{3 + 2(\sin \theta - \cos \theta)} = \sqrt{3 + 2\sqrt{2} \sin(\theta - \frac{\pi}{4})}$$

因为 $\sin(\theta - \frac{\pi}{4}) \in [-1, 1]$, 8 分

所以 $|PQ| \leq \sqrt{3 + 2\sqrt{2}} = \sqrt{2} + 1$ 9 分

当且仅当 $(\theta - \frac{\pi}{4}) = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ 时, 即 $\theta = 2k\pi + \frac{3\pi}{4}$, $k \in \mathbb{Z}$.

所以 $|PQ|$ 的最大值为 $\sqrt{2} + 1$ 10 分

23. 解：(1) 因为 $f(x) = |x+m| + |(x-n)| + 1 \geq |(x+m) - (x-n)| + 1 = |m+n| + 1$,

当且仅当 $(x+m) \cdot (x-n) \leq 0$ 时, 即 $x \in [-m, n]$ 时, 即等号成立.

又 $m > 0, n > 0$. 所以 $[f(x)]_{\min} = m+n+1=3$.

故 $m+n=2$ 5 分

(2) 由 (1) 知 $m+n=2$, 又 $m > 0, n > 0$.

所以 $\frac{1}{2m} + \frac{2}{n} = \left(\frac{1}{2m} + \frac{2}{n}\right) \cdot (m+n) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} + 2 + \frac{n}{2m} + \frac{2m}{n}\right) \geq \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{5}{2} + 2\sqrt{1}\right) = \frac{9}{4}$.

当且仅当 $\begin{cases} \frac{2m}{n} = \frac{n}{2m} \\ m+n=2 \end{cases}$, 即 $m = \frac{2}{3}, n = \frac{4}{3}$ 时, 等号成立.

因为 $\frac{1}{2m} + \frac{2}{n} \geq \frac{9}{4}$ 8 分

所以 $\log_{\frac{3}{2}} \left(\frac{1}{2m} + \frac{2}{n} \right) \geq 2$.

则 $m+n + \log_{\frac{3}{2}} \left(\frac{1}{2m} + \frac{2}{n} \right) \geq 4$

即 $n + \log_{\frac{3}{2}} \left(\frac{1}{2m} + \frac{2}{n} \right) \geq 4 - m$ 10 分