

成都石室中学 2022-2023 学年度下期高 2023 届二诊模拟考试
理科数学参考答案

双向细目表

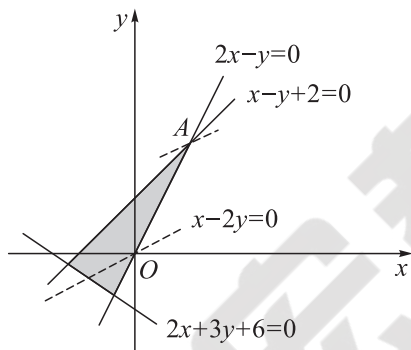
题型	题号	分值	内容板块	具体知识点	考查层次		
					了解	掌握	应用
选择题	1	5	集合	集合运算		✓	
选择题	2	5	复数	复数运算		✓	
选择题	3	5	统计	直方图,折线图		✓	
选择题	4	5	解析几何	线性规划		✓	
选择题	5	5	二项式	通项公式		✓	
选择题	6	5	传统文化	三角变换		✓	
选择题	7	5	排列组合	分类计数		✓	
选择题	8	5	解析几何	双曲线		✓	
选择题	9	5	函数	周期性,奇偶性		✓	
选择题	10	5	解析几何	抛物线		✓	
选择题	11	5	导数	单调性,比较大小		✓	
选择题	12	5	立体几何	点线面位置关系,动点问题		✓	
填空题	13	5	平面向量	数量积		✓	
填空题	14	5	解析几何	直线与圆		✓	
填空题	15	5	立体几何	球与多面体		✓	
填空题	16	5	三角函数	图象与性质		✓	
解答题	17	12	概率统计	分层抽样,随机变量分布列		✓	
解答题	18	12	数列	等比数列,求和		✓	
解答题	19	12	立体几何	线面关系,二面角		✓	
解答题	20	12	解析几何	椭圆综合问题			✓
解答题	21	12	函数与导数	零点问题,不等式证明			✓
解答题	22	10	选考	参数方程与极坐标		✓	
解答题	23	10	选考	不等式		✓	

答案及解析

1. C 【解析】由题意可得,集合 $A=\{x|0<x<3\}$, $B=\left\{x\left|x\geq\frac{1}{2}\right.\right\}$, 所以 $A\cup B=\{x|x>0\}$. 故选 C.
2. D 【解析】设 $z=x+yi(x,y\in\mathbf{R})$. 因为 $|z|=\bar{z}+1-2i$, 所以 $\sqrt{x^2+y^2}=x-yi+1-2i=(x+1)-(y+2)i$, 所以 $\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2}=x+1, \\ y+2=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=\frac{3}{2}, \\ y=-2,\end{cases}$ 则 $z=\frac{3}{2}-2i$, 所以复数 z 的虚部为 -2 . 故选 D.

3. D 【解析】这 7 年我国跨境电商交易规模的平均数为 $\frac{5.5+6.3+7.1+8.03+9.7+11.5+12.1}{7} > 8.0$ (万亿元), 故 A 错误; 这 7 年我国跨境电商交易规模的增速有升有降, 故 B 错误; 这 7 年我国跨境电商交易规模的极差为 $12.1-5.5=6.6$ (万亿元), 故 C 错误; 我国跨境电商交易规模的 6 个增速的中位数为 $\frac{13.1\%+14.5\%}{2}=13.8\%$, 故 D 正确. 故选 D.

4. B 【解析】作出可行域如图中阴影部分所示, $z=x-2y$ 可化简为 $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}z$, 即斜率为 $\frac{1}{2}$ 的平行直线. 由 $\begin{cases} x-y+2=0, \\ 2x-y=0, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x=2, \\ y=4, \end{cases}$ 则 $A(2,4)$. 结合图形可知, 当直线 $z=x-2y$ 过点 $A(2,4)$ 时, z 取最小值, $z_{\min}=2-2\times 4=-6$. 故选 B.



5. A 【解析】 $(1-2x)^4$ 展开式的通项公式为 $T_{r+1}=C_4^r(-2x)^r=C_4^r(-2)^r\cdot x^r$, 所以 $\left(\frac{1}{x}-2\right)(1-2x)^4$ 的展开式中, 常数项为 $C_4^1\times(-2)+(-2)\times C_4^0=-8-2=-10$. 故选 A.

6. B 【解析】对于正 n 边形, 其圆心角为 $\left(\frac{360}{n}\right)^\circ$, 面积为 $S_1=n\cdot\frac{1}{2}\cdot r\cdot r\cdot\sin\left(\frac{360}{n}\right)^\circ=\frac{n}{2}r^2\sin\left(\frac{360}{n}\right)^\circ$.

对于正 $2n$ 边形, 其圆心角为 $\left(\frac{360}{2n}\right)^\circ$, 面积为 $S_2=2n\cdot\frac{1}{2}\cdot r\cdot r\cdot\sin\left(\frac{360}{2n}\right)^\circ=nr^2\sin\left(\frac{180}{n}\right)^\circ$. 由此可得,

$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{\frac{n}{2}r^2\sin\left(\frac{360}{n}\right)^\circ}{nr^2\sin\left(\frac{180}{n}\right)^\circ}=\frac{nr^2\sin\left(\frac{180}{n}\right)^\circ\cos\left(\frac{180}{n}\right)^\circ}{nr^2\sin\left(\frac{180}{n}\right)^\circ}=\cos\left(\frac{180}{n}\right)^\circ. \text{ 故选 B.}$$

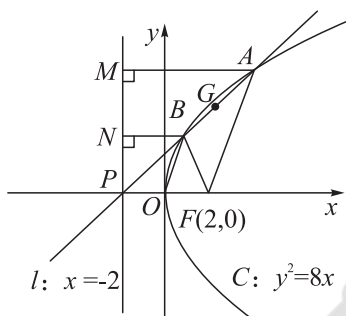
7. C 【解析】第一类, 从 0, 2, 4 中选一个数字, 若选 0, 则 0 只能排在十位, 故有 $A_3^2=6$ 个奇数; 第二类, 从 0, 2, 4 中选一个数字, 若不选 0, 则先把奇数排个位, 再排其他, 故有 $C_3^2C_2^1A_2^2=24$ 个奇数. 由加法原理可得, 奇数的个数为 $6+24=30$. 故选 C.

8. C 【解析】因为双曲线的右焦点为 $F(\sqrt{5}, 0)$, 所以 $c=\sqrt{5}$. 设其左焦点为 F_1 . 因为 $PF\perp QF$, 点 P, Q 关于原点 O 对称, 所以 $|PQ|=2|OF|=2\sqrt{5}$. 由 $\triangle PQF$ 的面积为 4, 得 $S=\frac{1}{2}|PF|\cdot|QF|=4$, 则 $|PF|\cdot|QF|=8$. 又 $|PF|^2+|QF|^2=|PQ|^2=20$, 所以 $||PF|-|QF||=2$. 又由双曲线的对称性可得 $|QF|=|PF_1|$, 则由双曲线的定义可得 $||PF|-|PF_1||=2=2a$, 所以 $a=1$, 则离心率 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{5}$. 故选 C.

9. D 【解析】因为 $f(x)$ 满足 $f(x)+f(-x)=0$, 所以 $f(x)$ 为奇函数. 又因为 $f(1+x)+f(1-x)=0$, 所以 $f(x+2)=f[1+(1+x)]=-f[1-(1+x)]=-f(-x)=f(x)$, 所以 $f(x)$ 是周期为 2 的奇函数. 又因为 $x\in(0, 1)$ 时, $f(x)=2^x-\sqrt{5}$, 所以 $f(\log_4 80)=f(2+\log_4 5)=f(\log_4 5)=f(\log_2 \sqrt{5})=$

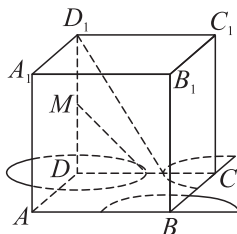
$f(\log_2 \sqrt{5} - 2) = -f(2 - \log_2 \sqrt{5}) = -2^{2 - \log_2 \sqrt{5}} + \sqrt{5} = -\frac{4}{\sqrt{5}} + \sqrt{5} = \frac{\sqrt{5}}{5}$. 故选 D.

10. A 【解析】如图, 设 AB 的中点为 G , 抛物线 $C: y^2 = 8x$ 的准线为 $l: x = -2$, 焦点为 $F(2, 0)$, 直线 $y = k(x+2) (k > 0)$ 过定点 $P(-2, 0)$, 过点 A, B 分别作 $AM \perp l$ 于点 M , $BN \perp l$ 于点 N . 由 $|FA| = 2|FB|$, 得 $|AM| = 2|BN|$, 所以点 B 为 AP 的中点. 连接 OB , 则 $|OB| = \frac{1}{2}|FA| = |FB|$, 故点 B 的横坐标为 1, 则点 A 的横坐标为 4, 所以 AB 的中点 G 的横坐标为 $\frac{1+4}{2} = \frac{5}{2}$. 故选 A.



11. C 【解析】令 $f(x) = e^x - 1 - x (x \geq 0)$, 则 $f'(x) = e^x - 1$, 当 $x > 0$ 时, $f'(x) > 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 所以当 $x > 0$ 时, $f(x) = e^x - 1 - x > f(0) = 0$, 即 $e^x - 1 > x$, 取 $x = 0.05$, 所以 $e^{0.05} - 1 > 0.05$. 令 $g(x) = \ln(x+1) - x (x \geq 0)$, 则 $g'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = -\frac{x}{1+x}$, 当 $x > 0$ 时, $g'(x) < 0$, 所以 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 所以当 $x > 0$ 时, $g(x) < g(0) = 0$, 即 $\ln(1+x) < x$, 取 $x = 0.05$, 所以 $\ln 1.05 < 0.05$, 故 $\ln 1.05 < e^{0.05} - 1$. 令 $h(x) = \ln(x+1) - \frac{x}{1+x} (x \geq 0)$, 则 $h'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{x}{(1+x)^2}$, 当 $x > 0$ 时, $h'(x) > 0$, 所以 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 所以当 $x > 0$ 时, $h(x) > h(0) = 0$, 即 $\ln(1+x) > \frac{x}{1+x}$, 取 $x = 0.05$, 所以 $\ln 1.05 > \frac{0.05}{1+0.05} = \frac{5}{105} = \frac{1}{21}$. 故选 C.

12. A 【解析】如图所示. 对于①, 因为 MN 与平面 $ABCD$ 所成的角为 $\frac{\pi}{4}$, 所以 $DN = MD = 1$, 所以动点 N 的轨迹为圆, 故①正确; 对于②, 当三棱柱 $NAD - N_1A_1D_1$ 的侧面积为定值时, 因为高为 2, 则 $|NA| + |ND|$ 为定值, 且大于 $|AD|$, 所以动点 N 的轨迹为椭圆, 故②正确; 对于③, 因为 $AB \parallel CD$, $CD \parallel C_1D_1$, 所以 $AB \parallel C_1D_1$, 于是满足条件的 D_1N 运动成圆锥面, 又 $C_1D_1 \parallel$ 平面 $ABCD$, 所以圆锥面被平面 $ABCD$ 所截的交线为双曲线, 故③正确; 对于④, 因为点 N 到直线 BB_1 与直线 DC 距离相等, 所以动点 N 的轨迹为点 N 到点 B 与直线 DC 的距离相等的轨迹, 即抛物线, 故④正确. 故选 A.



13. $\pm 2\sqrt{3}$ 【解析】因为 $\mathbf{a} + \mathbf{b} = (3, -2)$, $\mathbf{a} - \mathbf{b} = (1, x)$, 所以 $\mathbf{a} = \left(2, \frac{-2+x}{2}\right)$, $\mathbf{b} = \left(1, \frac{-2-x}{2}\right)$. 又因为 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$, 所以 $2 \times 1 + \frac{-2+x}{2} \times \frac{-2-x}{2} = 0$, 解得 $x = \pm 2\sqrt{3}$.

14. $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 2, (x+2)^2 + (y-2)^2 = 6$ 等(答案不唯一, 写出一个即可) 【解析】由题意可得, 直线 l_1, l_2 关于直线 $y = \pm x$ 对称. 当圆心 C 在直线 $y = x$ 上时, 圆 C 的方程形如 $(x-2a)^2 + (y-2a)^2 = 2a^2 (a \neq 0)$; 当圆心 C 在直线 $y = -x$ 上时, 圆 C 的方程形如 $(x+2a)^2 + (y-2a)^2 = 6a^2 (a \neq 0)$.

15. 20π 【解析】由 $AC=2\sqrt{3}, AB=2, BC=2$, 得 $\angle ABC = \frac{2\pi}{3}$, 所以 $2r = \frac{AC}{\sin \frac{2\pi}{3}} = 4$, 得 $r=2$ (r 为 $\triangle ABC$ 外接圆半径).

又 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin \angle ABC = \sqrt{3}$, 则 $V_{P-ABC} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} \cdot h = \frac{\sqrt{3}}{3} h = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, 所以 $h=2$, 即点 P 到平面 ABC 的距离为 2, 所以外接球球心 O (PC 的中点) 到平面 ABC 的距离 $d=1$, 所以外接球半径 $R^2 = r^2 + d^2 = 5$, 所以 $S_{\text{球}} = 4\pi R^2 = 20\pi$.

16. 5 【解析】因为函数 $f(x) = 2\sin(\omega x + \varphi)$, $f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 0$, 所以 $-\frac{\pi}{4}\omega + \varphi = m\pi, m \in \mathbb{Z}$ ①. 又因为 $f\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = f\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$, 所以直线 $x = \frac{\pi}{4}$ 是 $f(x)$ 图象的对称轴, 所以 $\frac{\pi}{4}\omega + \varphi = n\pi + \frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}$ ②. 由①②可得, $\varphi = (m+n)\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$. 又 $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$, 所以 $\varphi = \frac{\pi}{4}$, 则 $\omega = 4n+1, n \in \mathbb{Z}$. 又 $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{18}, \frac{2\pi}{9}\right)$ 上单调, $f(x)$ 的最小正周期为 $\frac{2\pi}{\omega}$, 所以 $\frac{2\pi}{9} - \frac{\pi}{18} \leq \frac{\pi}{\omega}$, 即 $\frac{1}{6} \leq \frac{1}{\omega}$, 解得 $\omega \leq 6$, 故 ω 的最大值为 5.

17. 解: (I) 参与调查的总人数为 $8000+4000+2000+1000+2000+3000=20000$, 其中从持“不支持”态度的人数 $2000+3000=5000$ 中抽取了 30 人, 所以 $n = 20000 \times \frac{30}{5000} = 120$ 4 分

(II) 在持“不支持”态度的人中, 50 岁以下及 50 岁以上人数之比为 2:3, 因此抽取的 10 人中, 50 岁以下与 50 岁以上的人数分别为 4 人, 6 人, 故 $\xi=0, 1, 2, 3, \dots$ 6 分

则 $P(\xi=0) = \frac{C_6^3}{C_{10}^3} = \frac{1}{6}, P(\xi=1) = \frac{C_4^1 C_6^2}{C_{10}^3} = \frac{1}{2}, P(\xi=2) = \frac{C_4^2 C_6^1}{C_{10}^3} = \frac{3}{10}, P(\xi=3) = \frac{C_4^3}{C_{10}^3} = \frac{1}{30}$ 10 分

ξ 的分布列为:

ξ	0	1	2	3
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{30}$

期望 $E\xi = 0 \times \frac{1}{6} + 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{3}{10} + 3 \times \frac{1}{30} = 1.2$ 12 分

18. 解: (I) 因为 $S_n = a_{n+1} - 2$, 所以 $S_{n-1} = a_n - 2 (n \geq 2)$.

将上述两式相减, 得 $a_{n+1} = 2a_n (n \geq 2)$ 2 分

因为 $a_1 = 2, S_1 = a_2 - 2$, 即 $a_1 = a_2 - 2$, 所以 $a_2 = 4$, 所以 $a_2 = 2a_1$, 3 分

所以 $a_{n+1} = 2a_n (n \in \mathbb{N}^*)$.

因为 $a_1 = 2 \neq 0$, 所以 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 2 (n \in \mathbb{N}^*)$, 5 分

所以数列 $\{a_n\}$ 是以 2 为首项, 2 为公比的等比数列, 所以 $a_n = 2^n$ 6 分

(II) 由 (I) 可知, $b_n = \log_2 a_n = \log_2 2^n = n$.

若选①: $c_n = b_n \cdot a_n = n \cdot 2^n$, 8 分

则 $T_n = 1 \cdot 2^1 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + n \cdot 2^n$,

$2T_n = 1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2^3 + \cdots + (n-1) \cdot 2^n + n \cdot 2^{n+1}$.

将上述两式相减,得 $-T_n = 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n - n \cdot 2^{n+1} = \frac{2-2^{n+1}}{1-2} - n \cdot 2^{n+1}$,

所以 $T_n = (n-1) \cdot 2^{n+1} + 2$ 12 分

若选②: $c_n = \frac{1}{4b_n^2 - 1} = \frac{1}{4n^2 - 1} = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right)$, 8 分

则 $T_n = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) + \cdots + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{n}{2n+1}$.

..... 12 分

若选③: $c_n = (-1)^n \cdot b_n^2 = (-1)^n \cdot n^2$ 7 分

当 n 为偶数时, $T_n = (-1^2 + 2^2) + (-3^2 + 4^2) + \cdots + [-(n-1)^2 + n^2] = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$; ...

..... 9 分

当 n 为奇数时, $T_n = T_{n+1} - c_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} - (n+1)^2 = -\frac{n(n+1)}{2}$ 11 分

综上, $T_n = (-1)^n \frac{n(n+1)}{2}$ 12 分

19. (I) 证明: 因为 $B = 90^\circ$, 所以 $BC \perp BD$.

因为 D, E 分别是边 AB, AC 的中点,

所以 $DE \parallel BC$, 所以 $DE \perp BD, DE \perp PD$ 1 分

又 $BD, PD \subset$ 平面 $PBD, BD \cap PD = D$, 2 分

所以 $DE \perp$ 平面 PBD 3 分

因为 $DE \parallel BC, DE \not\subset$ 平面 $PBC, BC \subset$ 平面 PBC ,

所以 $DE \parallel$ 平面 PBC 4 分

又 $DE \subset$ 平面 PDE , 平面 $PDE \cap$ 平面 $PBC = l$,

所以 $l \parallel DE$, 所以 $l \perp$ 平面 PBD 5 分

(II) 解: 如图, 过点 B 作 $BF \perp PD$, 垂足为 F .

由(I)可知, 平面 $PDE \perp$ 平面 PBD .

又平面 $PDE \cap$ 平面 $PBD = PD$, 所以 $BF \perp$ 平面 PDE ,

所以点 B 到平面 PDE 的距离即为 BF 的长, 则 $BF = \sqrt{3}$ 6 分

在 $Rt\triangle BDF$ 中, $\sin \angle PDB = \frac{BF}{BD} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 所以 $\angle PDB = 60^\circ$.

又 $BD = PD = 2$, 所以 $\triangle PBD$ 是边长为 2 的等边三角形.

取 BD 的中点 O , 连接 OP , 则 $OP \perp BD, OP = \sqrt{3}$ 7 分

由(I)可知, $DE \perp$ 平面 PBD .

又 $OP \subset$ 平面 PBD , 所以 $DE \perp OP$.

又 $BD \cap DE = D, BD, DE \subset$ 平面 $BCED$,

所以 $OP \perp$ 平面 $BCED$ 8 分

以 D 为坐标原点, DB, DE 所在直线分别为 x 轴、 y 轴, 且以过点 D 与 OP 平行的直线为 z 轴, 建立空

间直角坐标系如图所示,则 $D(0,0,0), P(1,0,\sqrt{3}), E(0,1,0), C(2,2,0)$,

所以 $\overrightarrow{PE}=(-1,1,-\sqrt{3}), \overrightarrow{EC}=(2,1,0), \overrightarrow{DE}=(0,1,0)$ 9 分

设平面 PEC 的法向量为 $\mathbf{m}=(x,y,z)$,

$$\text{则} \begin{cases} \overrightarrow{PE} \cdot \mathbf{m} = -x + y - \sqrt{3}z = 0, \\ \overrightarrow{EC} \cdot \mathbf{m} = 2x + y = 0. \end{cases}$$

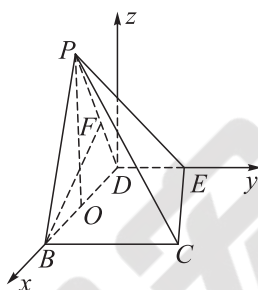
令 $x=1$, 得 $y=-2, z=-\sqrt{3}$,

所以 $\mathbf{m}=(1,-2,-\sqrt{3})$ 是平面 PEC 的一个法向量. 10 分

易知 $\overrightarrow{DE}=(0,1,0)$ 是平面 PBD 的一个法向量,

$$\text{所以 } |\cos \langle \mathbf{m}, \overrightarrow{DE} \rangle| = \frac{|\mathbf{m} \cdot \overrightarrow{DE}|}{|\mathbf{m}| |\overrightarrow{DE}|} = \frac{2}{1 \times 2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$

所以平面 PEC 与平面 PBD 夹角的正弦值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 12 分



$$20. \text{解: (I) 依题意, 得} \begin{cases} c=\sqrt{3}, \\ \frac{3}{a^2} + \frac{1}{4b^2} = 1, \\ a^2 = b^2 + c^2, \end{cases} \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\text{解得} \begin{cases} a=2, \\ b=1, \\ c=\sqrt{3}, \end{cases} \text{ 所以椭圆 } C \text{ 的标准方程为 } \frac{x^2}{4} + y^2 = 1. \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

(II) 易知直线 AP 与 AQ 的斜率同号,

所以直线 PQ 不垂直于 x 轴,

故可设 $PQ: y=kx+m, P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$.

$$\text{由} \begin{cases} \frac{x^2}{4} + y^2 = 1, \\ y = kx + m, \end{cases} \text{ 得 } (1+4k^2)x^2 + 8mkx + 4m^2 - 4 = 0,$$

$$\text{所以 } x_1 + x_2 = \frac{-8mk}{1+4k^2}, x_1 x_2 = \frac{4m^2 - 4}{1+4k^2}, \Delta = 16(4k^2 + 1 - m^2) > 0, \text{ 即 } 4k^2 + 1 > m^2. \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$\text{由 } k_{AP} \cdot k_{AQ} = \frac{1}{20}, \text{ 得 } \frac{y_1}{x_1 - 2} \cdot \frac{y_2}{x_2 - 2} = \frac{1}{20},$$

$$\text{消去 } y_1, y_2 \text{ 得 } 20(kx_1 + m)(kx_2 + m) = (x_1 - 2)(x_2 - 2),$$

$$\text{即 } 20k^2 x_1 x_2 + 20km(x_1 + x_2) + 20m^2 = x_1 x_2 - 2(x_1 + x_2) + 4,$$

$$\text{所以 } 20k^2 \cdot \frac{4m^2 - 4}{1+4k^2} + 20km \cdot \frac{-8mk}{1+4k^2} + 20m^2 = \frac{4m^2 - 4}{1+4k^2} - 2 \cdot \frac{-8mk}{1+4k^2} + 4,$$

$$\text{整理得 } m^2 - km - 6k^2 = 0, \text{ 所以 } m = -2k \text{ 或 } m = 3k,$$

所以直线 $PQ: y=k(x-2)$ 或 $y=k(x+3)$.

又因为直线 PQ 不经过点 $A(2,0)$,

所以直线 PQ 经过定点 $(-3,0)$, 9 分

所以直线 PQ 的方程为 $y=k(x+3)$, 易知 $k \neq 0$, 设定点 $B(-3,0)$,

$$\begin{aligned} \text{则 } S_{\triangle APQ} &= |S_{\triangle ABP} - S_{\triangle ABQ}| \\ &= \frac{1}{2} |AB| |y_1 - y_2| \\ &= \frac{5}{2} |k| |x_1 - x_2| \\ &= \frac{5}{2} |k| \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2} \\ &= \frac{5}{2} |k| \sqrt{\left(\frac{-8km}{1+4k^2}\right)^2 - 4 \cdot \frac{4m^2-4}{1+4k^2}} \\ &= \frac{5|k|}{2} \cdot \frac{\sqrt{16(4k^2+1-m^2)}}{1+4k^2} \\ &= \frac{10\sqrt{(1-5k^2)k^2}}{1+4k^2}. \end{aligned}$$

因为 $\Delta > 0$ 即 $4k^2 + 1 > m^2$, 且 $m = 3k$, 所以 $1 - 5k^2 > 0$, 所以 $0 < k^2 < \frac{1}{5}$,

$$\text{所以 } S_{\triangle APQ} = \frac{10\sqrt{(1-5k^2)k^2}}{1+4k^2} = \frac{5}{3} \cdot \frac{2\sqrt{(1-5k^2) \cdot 9k^2}}{1+4k^2} \leq \frac{5}{3} \cdot \frac{(1-5k^2)+9k^2}{1+4k^2} = \frac{5}{3}, \text{ 当且仅当 } k^2 = \frac{1}{14}$$

时取等号,

所以 $\triangle APQ$ 面积的最大值为 $\frac{5}{3}$ 12 分

$$21. (I) \text{解: } f'(x) = \frac{2a}{x} + 2x - 2(a+1) = \frac{2x^2 - 2(a+1)x + 2a}{x} = \frac{2(x-a)(x-1)}{x}. \text{ 1 分}$$

因为 $a < 0$, 所以当 $x \in (0, 1)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减;

当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增,

所以 $f(x)_{\min} = f(1) = -1 - 2a$ 2 分

当 $-1 - 2a > 0$, 即 $a < -\frac{1}{2}$ 时, $f(x)$ 的零点个数为 0. 3 分

当 $-1 - 2a = 0$, 即 $a = -\frac{1}{2}$ 时, $f(x)$ 的零点个数为 1. 4 分

当 $-1 - 2a < 0$, 即 $-\frac{1}{2} < a < 0$ 时,

注意到 $0 < e^{\frac{1}{a}} < 1$, $f(e^{\frac{1}{a}}) = 2 + e^{\frac{2}{a}} - 2(a+1)e^{\frac{1}{a}} = e^{\frac{2}{a}} - 2ae^{\frac{1}{a}} + 2(1 - e^{\frac{1}{a}}) > 0$.

因为 $f(x) \geq 2a(x-1) + x^2 - 2(a+1)x = x^2 - 2x - 2a$, 所以 $f(2) > -2a > 0$.

因此, $\exists x_1 \in (e^{\frac{1}{a}}, 1)$, $\exists x_2 \in (1, 2)$, 使得 $f(x_1) = f(x_2) = 0$,

所以此时 $f(x)$ 的零点个数为 2.

综上, 当 $a < -\frac{1}{2}$ 时, $f(x)$ 的零点个数为 0; 当 $a = -\frac{1}{2}$ 时, $f(x)$ 的零点个数为 1; 当 $-\frac{1}{2} < a < 0$ 时, $f(x)$ 的零点个数为 2. 6 分

(II) 证明: (证法一) 由 (I) 可知, 当 $a \in \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ 时, 函数 $f(x)$ 有两个零点, 且 $0 < x_1 < 1 < x_2$.

令 $F(x) = f(2-x) - f(x) = 2a \left(\ln \frac{2-x}{x} + 2x - 2 \right), x \in (0, 1), \dots\dots\dots 8$ 分

则 $F'(x) = -4a \cdot \frac{(x-1)^2}{x(2-x)}$.

当 $x \in (0, 1)$ 时, $F'(x) > 0$, 所以 $F(x)$ 在区间 $(0, 1)$ 上单调递增, $\dots\dots\dots 10$ 分

所以 $F(x_1) = f(2-x_1) - f(x_1) < F(1) = 0$,

所以 $f(2-x_1) < f(x_1) = f(x_2)$.

因为 $0 < x_1 < 1 < x_2$, 所以 $2-x_1 > 1$.

又由 (I) 可知, $f(x)$ 在区间 $(1, +\infty)$ 上单调递增,

所以 $2-x_1 < x_2$, 故 $x_1 + x_2 > 2. \dots\dots\dots 12$ 分

(证法二) 由 $f(x_1) = f(x_2) = 0$, 得 $\begin{cases} x_1^2 - 2(a+1)x_1 = -2a \ln x_1, \\ x_2^2 - 2(a+1)x_2 = -2a \ln x_2, \end{cases}$

则 $x_1 + x_2 - 2(a+1) = -2a \cdot \frac{\ln x_1 - \ln x_2}{x_1 - x_2}. \dots\dots\dots 8$ 分

由对数平均不等式 $\frac{x_1 - x_2}{\ln x_1 - \ln x_2} < \frac{x_1 + x_2}{2}$, 得 $x_1 + x_2 - 2(a+1) > -4a \cdot \frac{1}{x_1 + x_2}, \dots\dots\dots 10$ 分

所以 $(x_1 + x_2)^2 - 2(a+1)(x_1 + x_2) + 4a > 0$,

所以 $(x_1 + x_2 - 2)(x_1 + x_2 - 2a) > 0$.

又 $x_1 + x_2 - 2a > 0$, 所以 $x_1 + x_2 > 2. \dots\dots\dots 12$ 分

22. 解: (I) 曲线 C 的普通方程为 $(x-1)^2 + y^2 = 1, x \in (0, 2]. \dots\dots\dots 5$ 分

(II) 直线 l 的极坐标方程为 $\rho(\sin \theta + \cos \theta) = 1$, 易得 $|OA| = \frac{1}{\sin \alpha + \cos \alpha}. \dots\dots\dots 6$ 分

曲线 C 的极坐标方程为 $\rho = 2\cos \theta$, 易得 $|OB| = 2\cos \alpha. \dots\dots\dots 7$ 分

由已知, 得 $\frac{1}{\sin \alpha + \cos \alpha} = 2(\sqrt{3} - 1)\cos \alpha$,

$$\sin 2\alpha + 2\cos^2 \alpha = \frac{\sqrt{3} + 1}{2},$$

$$\sin 2\alpha + 1 + \cos 2\alpha = \frac{\sqrt{3} + 1}{2},$$

$$\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = \frac{\sqrt{3} - 1}{2},$$

$$\text{两边平方并整理得 } \sin 4\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

又 $0 < \alpha < \frac{3\pi}{8}$, 即 $0 < 4\alpha < \frac{3\pi}{2}$, 所以 $4\alpha = \frac{4\pi}{3}$, 则 $\alpha = \frac{\pi}{3}. \dots\dots\dots 10$ 分

23. 解: (I) 由题意, 知 $|x+a| - |x-2b| \leq |(x+a) - (x-2b)| = |a+2b| = a+2b. \dots\dots\dots 3$ 分

因为存在 $x_0 \in \mathbf{R}$, 使得 $|x_0+a| - |x_0-2b| \geq 4$,

所以只需 $a+2b \geq 4$, 即 $a+2b$ 的取值范围是 $[4, +\infty). \dots\dots\dots 5$ 分

(II) 由柯西不等式, 得 $(1^2 + 2^2)(a^2 + b^2) \geq (a+2b)^2 \geq 16, \dots\dots\dots 8$ 分

当 $a = \frac{4}{5}, b = \frac{8}{5}$ 时, $a^2 + b^2$ 取得最小值 $\frac{16}{5}. \dots\dots\dots 10$ 分