

成都石室中学 2022-2023 学年度下期高 2023 届二诊模拟考试
文科数学参考答案

双向细目表

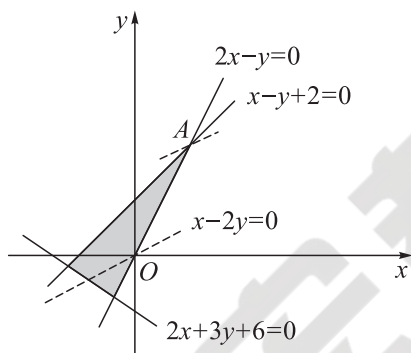
题型	题号	分值	内容板块	具体知识点	考查层次		
					了解	掌握	应用
选择题	1	5	集合	集合运算		✓	
选择题	2	5	复数	复数运算		✓	
选择题	3	5	统计	直方图,折线图		✓	
选择题	4	5	解析几何	线性规划		✓	
选择题	5	5	三角函数	恒等变换		✓	
选择题	6	5	立体几何	线面位置关系		✓	
选择题	7	5	传统文化	框图		✓	
选择题	8	5	解析几何	双曲线		✓	
选择题	9	5	立体几何	三视图		✓	
选择题	10	5	函数	周期性,奇偶性		✓	
选择题	11	5	解析几何	抛物线		✓	
选择题	12	5	不等式	比较大小		✓	
填空题	13	5	平面向量	数量积		✓	
填空题	14	5	解析几何	直线与圆		✓	
填空题	15	5	立体几何	球与多面体		✓	
填空题	16	5	三角函数	图象与性质		✓	
解答题	17	12	概率统计	分层抽样,概率		✓	
解答题	18	12	数列	等比数列,求和		✓	
解答题	19	12	立体几何	线面关系,体积		✓	
解答题	20	12	导数	最值问题,恒成立问题			✓
解答题	21	12	解析几何	椭圆综合问题			✓
解答题	22	10	选考	参数方程与极坐标		✓	
解答题	23	10	选考	不等式		✓	

答案及解析

1. C 【解析】由题意可得,集合 $A=\{x|0<x<3\}$, $B=\left\{x\left|x\geq\frac{1}{2}\right.\right\}$, 所以 $A\cup B=\{x|x>0\}$. 故选 C.
2. C 【解析】设 $z=x+yi(x,y\in\mathbf{R})$. 因为 $|z|=\sqrt{x^2+y^2}=x+1-2i$, 所以 $\sqrt{x^2+y^2}=x+1$, $-2i=yi$, 所以 $\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2}=x+1, \\ y+2=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=\frac{3}{2}, \\ y=-2,\end{cases}$ 则 $z=\frac{3}{2}-2i$, 所以复数 z 的虚部为 -2 . 故选 C.

3. D 【解析】这 7 年我国跨境电商交易规模的平均数为 $\frac{5.5+6.3+7.1+8.03+9.7+11.5+12.1}{7} > 8.0$ (万亿元), 故 A 错误; 这 7 年我国跨境电商交易规模的增速有升有降, 故 B 错误; 这 7 年我国跨境电商交易规模的极差为 $12.1-5.5=6.6$ (万亿元), 故 C 错误; 我国跨境电商交易规模的 6 个增速的中位数为 $\frac{13.1\%+14.5\%}{2}=13.8\%$, 故 D 正确. 故选 D.

4. B 【解析】作出可行域如图中阴影部分所示, $z=x-2y$ 可化简为 $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}z$, 即斜率为 $\frac{1}{2}$ 的平行直线. 由 $\begin{cases} x-y+2=0, \\ 2x-y=0, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x=2, \\ y=4, \end{cases}$ 则 $A(2,4)$. 结合图形可知, 当直线 $z=x-2y$ 过点 $A(2,4)$ 时, z 取最小值, $z_{\min}=2-2\times 4=-6$. 故选 B.



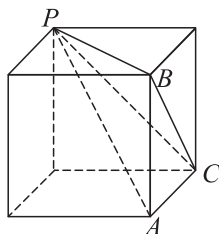
5. B 【解析】由已知, 得 $\sin 2\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right) = 1-2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right) = \frac{2}{3}$. 故选 B.

6. D 【解析】可借助正方体进行判断. 对于 A 选项, 正方体中从同一顶点出发的三条棱两两垂直, 故 A 错误; 对于 B 选项, 选取正方体的上、下底面为 α, β 以及一个侧面为 γ , 则 $\alpha \parallel \beta$, 故 B 错误; 对于 C 选项, 选取正方体的上底面的对角线为 a, b , 下底面为 α , 则 $a \parallel b$ 不成立, 故 C 错误; 对于 D 选项, 选取正方体的上、下底面为 α, γ , 任意作一个平面 β 平行于下底面 γ , 则有 $\alpha \parallel \beta$ 成立, 故 D 正确. 故选 D.

7. C 【解析】由已知中的程序框图可得, 该程序的功能是利用循环结构计算并输出同时满足条件: ①被 3 除余 1, ②被 5 除余 2, 且最小为两位数, 所以输出的 $n=22$. 故选 C.

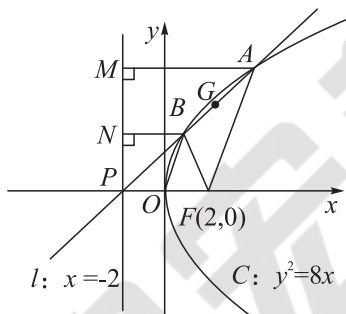
8. C 【解析】因为双曲线的右焦点为 $F(\sqrt{5}, 0)$, 所以 $c=\sqrt{5}$. 设其左焦点为 F_1 . 因为 $PF \perp QF$, 点 P, Q 关于原点 O 对称, 所以 $|PQ|=2|OF|=2\sqrt{5}$. 由 $\triangle PQF$ 的面积为 4, 得 $S=\frac{1}{2}|PF| \cdot |QF|=4$, 则 $|PF| \cdot |QF|=8$. 又 $|PF|^2+|QF|^2=|PQ|^2=20$, 所以 $||PF|-|QF||=2$. 又由双曲线的对称性可得 $|QF|=|PF_1|$, 则由双曲线的定义可得 $||PF|-|PF_1||=2=2a$, 所以 $a=1$, 则离心率 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{5}$. 故选 C.

9. B 【解析】如图, 该几何体是棱长为 2 的正方体中的三棱锥 $P-ABC$, 其中面积最大为 $S_{\triangle PBC} = \frac{1}{2} \times (2\sqrt{2})^2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$. 故选 B.



10. D 【解析】因为 $f(x)$ 满足 $f(x) + f(-x) = 0$, 所以 $f(x)$ 为奇函数. 又因为 $f(1+x) + f(1-x) = 0$, 所以 $f(x+2) = f[1+(1+x)] = -f[1-(1+x)] = -f(-x) = f(x)$, 所以 $f(x)$ 是周期为 2 的奇函数. 又因为 $x \in (0, 1)$ 时, $f(x) = 2^x - \sqrt{5}$, 所以 $f(\log_4 80) = f(2 + \log_4 5) = f(\log_4 5) = f(\log_2 \sqrt{5}) = f(\log_2 \sqrt{5} - 2) = -f(2 - \log_2 \sqrt{5}) = -2^{2 - \log_2 \sqrt{5}} + \sqrt{5} = -\frac{4}{\sqrt{5}} + \sqrt{5} = \frac{\sqrt{5}}{5}$. 故选 D.

11. A 【解析】如图, 设 AB 的中点为 G , 抛物线 $C: y^2 = 8x$ 的准线为 $l: x = -2$, 焦点为 $F(2, 0)$, 直线 $y = k(x+2) (k > 0)$ 过定点 $P(-2, 0)$, 过点 A, B 分别作 $AM \perp l$ 于点 M , $BN \perp l$ 于点 N . 由 $|FA| = 2|FB|$, 得 $|AM| = 2|BN|$, 所以点 B 为 AP 的中点. 连接 OB , 则 $|OB| = \frac{1}{2}|FA| = |FB|$, 做点 B 的横坐标为 1, 则点 A 的横坐标为 4, 所以 AB 的中点 G 的横坐标为 $\frac{1+4}{2} = \frac{5}{2}$. 故选 A.



12. A 【解析】因为 $a = \log_2 3 > 1, b = \log_3 4 > 1$, 所以 $\frac{b}{a} = \log_3 2 \times \log_3 4 < \left(\frac{\log_3 2 + \log_3 4}{2}\right)^2 = \left(\frac{\log_3 8}{2}\right)^2 < \left(\frac{\log_3 9}{2}\right)^2 = 1$, 所以 $a > b > 1$, 所以 $c = \log_a b < \log_a a = 1$, 所以 $a > b > c$. 故选 A.

13. $\pm 2\sqrt{3}$ 【解析】因为 $\mathbf{a} + \mathbf{b} = (3, -2), \mathbf{a} - \mathbf{b} = (1, x)$, 所以 $\mathbf{a} = \left(2, \frac{-2+x}{2}\right), \mathbf{b} = \left(1, \frac{-2-x}{2}\right)$. 又因为 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$, 所以 $2 \times 1 + \frac{-2+x}{2} \times \frac{-2-x}{2} = 0$, 解得 $x = \pm 2\sqrt{3}$.

14. $(x - \sqrt{3})^2 + (y - 1)^2 = 1$ (答案不唯一) 【解析】由题意可得, 圆心 C 在直线 $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ 上, 圆 C 的方程形如 $(x - \sqrt{3}a)^2 + (y - a)^2 = a^2 (a > 0)$.

15. 20π 【解析】由 $AC = 2\sqrt{3}, AB = 2, BC = 2$, 得 $\angle ABC = \frac{2\pi}{3}$, 所以 $2r = \frac{AC}{\sin \frac{2\pi}{3}} = 4$, 得 $r = 2$ (r 为 $\triangle ABC$ 外接圆半径).

又 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot BC \cdot \sin \angle ABC = \sqrt{3}$, 则 $V_{P-ABC} = \frac{1}{3}S_{\triangle ABC} \cdot h = \frac{\sqrt{3}}{3}h = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, 所以 $h = 2$,

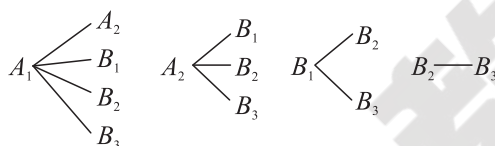
即点 P 到平面 ABC 的距离为 2, 所以外接球球心 O (PC 的中点) 到平面 ABC 的距离 $d = 1$, 所以外接球半径 $R^2 = r^2 + d^2 = 5$, 所以 $S_{\text{球}} = 4\pi R^2 = 20\pi$.

16. 5 【解析】因为函数 $f(x) = 2\sin(\omega x + \varphi), f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 0$, 所以 $-\frac{\pi}{4}\omega + \varphi = m\pi, m \in \mathbb{Z}$ ①. 又因为

$f\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=f\left(\frac{\pi}{4}+x\right)$, 所以直线 $x=\frac{\pi}{4}$ 是 $f(x)$ 图象的对称轴, 所以 $\frac{\pi}{4}\omega+\varphi=n\pi+\frac{\pi}{2}, n \in \mathbf{Z}$ ②. 由 ①② 可得, $\varphi=(m+n)\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$. 又 $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$, 所以 $\varphi=\frac{\pi}{4}$, 则 $\omega=4n+1, n \in \mathbf{Z}$. 又 $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{18}, \frac{2\pi}{9}\right)$ 上单调, $f(x)$ 的最小正周期为 $\frac{2\pi}{\omega}$, 所以 $\frac{2\pi}{9}-\frac{\pi}{18} \leq \frac{\pi}{\omega}$, 即 $\frac{1}{6} \leq \frac{1}{\omega}$, 解得 $\omega \leq 6$, 故 ω 的最大值为 5.

17. 解: (I) 参与调查的总人数为 $8000+4000+2000+1000+2000+3000=20000$, 其中从持“不支持”态度的人数 $2000+3000=5000$ 中抽取了 30 人, 所以 $n=20000 \times \frac{30}{5000}=120$ 4 分

(II) 由已知易得, 抽取的 5 人中, 50 岁以下与 50 岁以上人数分别为 2 人(记为 A_1, A_2), 3 人(记为 B_1, B_2, B_3). 5 分
画树状图如下:



由树状图可知, 从这 5 人中任意选取 2 人, 基本事件共 10 个, 9 分
其中, 至少有 1 人年龄在 50 岁以下的事件有 7 个, 11 分
故所求概率为 $\frac{7}{10}$ 12 分

18. 解: (I) 因为 $S_n=a_{n+1}-2$, 所以 $S_{n-1}=a_n-2(n \geq 2)$.

将上述两式相减, 得 $a_{n+1}=2a_n(n \geq 2)$ 2 分
因为 $a_1=2, S_1=a_2-2$, 即 $a_1=a_2-2$, 所以 $a_2=4$, 所以 $a_2=2a_1$, 3 分
所以 $a_{n+1}=2a_n(n \in \mathbf{N}^*)$.

因为 $a_1=2 \neq 0$, 所以 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=2(n \in \mathbf{N}^*)$, 5 分
所以数列 $\{a_n\}$ 是以 2 为首项, 2 为公比的等比数列, 所以 $a_n=2^n$ 6 分

(II) 由 (I) 可知, $b_n=\log_2 a_n=\log_2 2^n=n$.

若选①: $c_n=b_n \cdot a_n=n \cdot 2^n$, 8 分

则 $T_n=1 \cdot 2^1+2 \cdot 2^2+3 \cdot 2^3+\cdots+n \cdot 2^n$,

$2T_n=1 \cdot 2^2+2 \cdot 2^3+\cdots+(n-1) \cdot 2^n+n \cdot 2^{n+1}$.

将上述两式相减, 得 $-T_n=2+2^2+2^3+\cdots+2^n-n \cdot 2^{n+1}=\frac{2-2^{n+1}}{1-2}-n \cdot 2^{n+1}$,

所以 $T_n=(n-1) \cdot 2^{n+1}+2$ 12 分

若选②: $c_n=\frac{1}{4b_n^2-1}=\frac{1}{4n^2-1}=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$, 8 分

则 $T_n=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{n}{2n+1}$.

..... 12 分

若选③： $c_n = (-1)^n \cdot b_n^2 = (-1)^n \cdot n^2$ 7 分

当 n 为偶数时， $T_n = (-1^2 + 2^2) + (-3^2 + 4^2) + \cdots + [-(n-1)^2 + n^2] = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$; ...
..... 9 分

当 n 为奇数时， $T_n = T_{n+1} - c_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} - (n+1)^2 = -\frac{n(n+1)}{2}$ 11 分

综上， $T_n = (-1)^n \frac{n(n+1)}{2}$ 12 分

19. (I) 证明：如图，取 CF 的中点 D ，连接 DM, DN .

因为 M, N 分别是 AF, CE 的中点，所以 $DM \parallel AC, DN \parallel EF$.

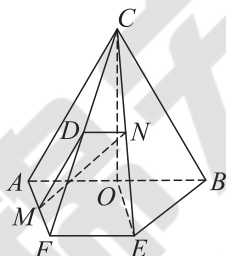
又因为 $DM \not\subset$ 平面 $ABC, AC \subset$ 平面 ABC ，所以 $DM \parallel$ 平面 ABC 2 分

又因为 $EF \parallel AB$ ，所以 $DN \parallel AB$ ，同理可得， $DN \parallel$ 平面 ABC 4 分

因为 $DM \subset$ 平面 $MND, DN \subset$ 平面 $MND, DM \cap DN = D$ ，

所以平面 $MND \parallel$ 平面 ABC .

又因为 $MN \subset$ 平面 MND ，所以 $MN \parallel$ 平面 ABC 6 分



(II) 解：如图，取 AB 的中点 O ，连接 OC, OE .

由已知可得， $OA \parallel EF$ 且 $OA = EF$ ，

所以四边形 $OAFE$ 是平行四边形，所以 $OE \parallel AF$ 且 $OE = AF$.

因为 $\triangle ABC$ 是正三角形， O 是 AB 的中点，所以 $OC \perp AB$.

又因为平面 $ABC \perp$ 平面 $ABEF$ ，平面 $ABC \cap$ 平面 $ABEF = AB$ ，

所以 $OC \perp$ 平面 $ABEF$ 9 分

又 $OE \subset$ 平面 $ABEF$ ，所以 $OC \perp OE$.

设 $AF = EF = EB = \frac{1}{2}AB = a$ ，则 $OC = \sqrt{3}a, OE = a$.

在 $\text{Rt}\triangle COE$ 中，由 $OC^2 + OE^2 = CE^2$ ，得 $(\sqrt{3}a)^2 + a^2 = 4^2$ ，则 $a = 2$ ，

所以 $OC = 2\sqrt{3}, AF = EF = EB = \frac{1}{2}AB = 2$ ，则 $AB = 4, AM = \frac{1}{2}AF = 1$.

由题意易得， $\angle FAB = 60^\circ$ ，

则点 M 到 AB 的距离 $h = AM \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，即点 M 到平面 ABC 的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

又 $MN \parallel$ 平面 ABC ，

所以 $V_{N-ABC} = V_{M-ABC} = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle ABC} \cdot h = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 4 \times 2\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2$ 12 分

20. 解：(I) 当 $a=1$ 时, $f(x) = \ln x - x^2 + x$, $f'(x) = \frac{1}{x} - 2x + 1 = -\frac{(2x+1)(x-1)}{x}$, 1 分

当 $x \in (0, 1)$ 时, $f'(x) > 0$; 当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $f'(x) < 0$, 2 分

所以 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减, 3 分

所以 $f(x)_{\max} = f(1) = 0$ 4 分

(II) 由 $f(x) = \ln x - ax^2 + x + \ln a (a > 0)$, 得 $f'(x) = \frac{1}{x} - 2ax + 1 (a > 0)$,

易知 $f'(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减. 5 分

①由 (I) 可知, 当 $a=1$ 时, $f(x) \leq 0$, 符合题意. 6 分

②当 $0 < a < 1$ 时, $f'(1) = 2(1-a) > 0$, $f'(\frac{1}{a}) = a - 1 < 0$,

所以存在 $x_1 \in (1, \frac{1}{a})$, 使得 $f'(x_1) = 0$, 7 分

故当 $x \in (x_1, \frac{1}{a})$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减,

所以 $f(x) > f(\frac{1}{a}) = \ln \frac{1}{a} - a \cdot (\frac{1}{a})^2 + \frac{1}{a} + \ln a = 0$, 不符题意, 舍去. 8 分

③当 $a > 1$ 时, $f'(1) = 2(1-a) < 0$, $f'(\frac{1}{a}) = a - 1 > 0$,

所以存在 $x_2 \in (\frac{1}{a}, 1)$, 使得 $f'(x_2) = 0$, 9 分

故当 $x \in [1, +\infty)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减, $f(x) \leq f(1) = \ln a - a + 1$ 10 分

令 $g(a) = \ln a - a + 1 (a > 1)$, 则 $g'(a) = \frac{1}{a} - 1 = \frac{1-a}{a} < 0$, 故 $g(a)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减,

所以 $g(a) < g(1) = 0$, 故 $f(x) < 0$, 符合题意.

综上所述, a 的取值范围是 $[1, +\infty)$ 12 分

21. 解：(I) 依题意, 得 $\begin{cases} c = \sqrt{3}, \\ \frac{3}{a^2} + \frac{1}{4b^2} = 1, \\ a^2 = b^2 + c^2, \end{cases}$ 2 分

解得 $\begin{cases} a = 2, \\ b = 1, \\ c = \sqrt{3}, \end{cases}$ 所以椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 4 分

(II) 易知直线 AP 与 AQ 的斜率同号,

所以直线 PQ 不垂直于 x 轴,

故可设 $PQ: y = kx + m, P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$.

$$\text{由} \begin{cases} \frac{x^2}{4} + y^2 = 1, \\ y = kx + m, \end{cases} \text{得} (1+4k^2)x^2 + 8mkx + 4m^2 - 4 = 0,$$

$$\text{所以 } x_1 + x_2 = \frac{-8mk}{1+4k^2}, x_1 x_2 = \frac{4m^2 - 4}{1+4k^2}, \Delta = 16(4k^2 + 1 - m^2) > 0, \text{即 } 4k^2 + 1 > m^2. \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$\text{由 } k_{AP} \cdot k_{AQ} = \frac{1}{20}, \text{得 } \frac{y_1}{x_1 - 2} \cdot \frac{y_2}{x_2 - 2} = \frac{1}{20},$$

$$\text{消去 } y_1, y_2 \text{ 得 } 20(kx_1 + m)(kx_2 + m) = (x_1 - 2)(x_2 - 2),$$

$$\text{即 } 20k^2 x_1 x_2 + 20km(x_1 + x_2) + 20m^2 = x_1 x_2 - 2(x_1 + x_2) + 4,$$

$$\text{所以 } 20k^2 \cdot \frac{4m^2 - 4}{1+4k^2} + 20km \cdot \frac{-8mk}{1+4k^2} + 20m^2 = \frac{4m^2 - 4}{1+4k^2} - 2 \cdot \frac{-8mk}{1+4k^2} + 4,$$

$$\text{整理得 } m^2 - km - 6k^2 = 0, \text{所以 } m = -2k \text{ 或 } m = 3k,$$

$$\text{所以直线 } PQ: y = k(x - 2) \text{ 或 } y = k(x + 3).$$

$$\text{又因为直线 } PQ \text{ 不经过点 } A(2, 0),$$

$$\text{所以直线 } PQ \text{ 经过定点 } (-3, 0), \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$\text{所以直线 } PQ \text{ 的方程为 } y = k(x + 3), \text{易知 } k \neq 0, \text{设定点 } B(-3, 0),$$

$$\text{则 } S_{\triangle APQ} = |S_{\triangle ABP} - S_{\triangle ABQ}|$$

$$= \frac{1}{2} |AB| |y_1 - y_2|$$

$$= \frac{5}{2} |k| |x_1 - x_2|$$

$$= \frac{5}{2} |k| \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2}$$

$$= \frac{5}{2} |k| \sqrt{\left(\frac{-8km}{1+4k^2}\right)^2 - 4 \cdot \frac{4m^2 - 4}{1+4k^2}}$$

$$= \frac{5|k|}{2} \cdot \frac{\sqrt{16(4k^2 + 1 - m^2)}}{1+4k^2}$$

$$= \frac{10\sqrt{(1-5k^2)k^2}}{1+4k^2}.$$

$$\text{因为 } \Delta > 0 \text{ 即 } 4k^2 + 1 > m^2, \text{且 } m = 3k, \text{所以 } 1 - 5k^2 > 0, \text{所以 } 0 < k^2 < \frac{1}{5},$$

$$\text{所以 } S_{\triangle APQ} = \frac{10\sqrt{(1-5k^2)k^2}}{1+4k^2} = \frac{5}{3} \cdot \frac{2\sqrt{(1-5k^2) \cdot 9k^2}}{1+4k^2} \leq \frac{5}{3} \cdot \frac{(1-5k^2) + 9k^2}{1+4k^2} = \frac{5}{3}, \text{当且仅当 } k^2 = \frac{1}{14}$$

时取等号,

$$\text{所以 } \triangle APQ \text{ 面积的最大值为 } \frac{5}{3}. \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

$$22. \text{解: (I) 曲线 } C \text{ 的普通方程为 } (x-1)^2 + y^2 = 1, x \in (0, 2]. \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$\text{(II) 直线 } l \text{ 的极坐标方程为 } \rho(\sin \theta + \cos \theta) = 1, \text{易得 } |OA| = \frac{1}{\sin \alpha + \cos \alpha}. \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

曲线 C 的极坐标方程为 $\rho = 2\cos \theta$, 易得 $|OB| = 2\cos \alpha$ 7 分

由已知, 得 $\frac{1}{\sin \alpha + \cos \alpha} = 2(\sqrt{3} - 1)\cos \alpha$,

$$\sin 2\alpha + 2\cos^2 \alpha = \frac{\sqrt{3} + 1}{2},$$

$$\sin 2\alpha + 1 + \cos 2\alpha = \frac{\sqrt{3} + 1}{2},$$

$$\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = \frac{\sqrt{3} - 1}{2},$$

两边平方并整理得 $\sin 4\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

又 $0 < \alpha < \frac{3\pi}{8}$, 即 $0 < 4\alpha < \frac{3\pi}{2}$, 所以 $4\alpha = \frac{4\pi}{3}$, 则 $\alpha = \frac{\pi}{3}$ 10 分

23. 解: (I) 由题意, 知 $|x+a| - |x-2b| \leq |(x+a) - (x-2b)| = |a+2b| = a+2b$ 3 分

因为存在 $x_0 \in \mathbf{R}$, 使得 $|x_0+a| - |x_0-2b| \geq 4$,

所以只需 $a+2b \geq 4$, 即 $a+2b$ 的取值范围是 $[4, +\infty)$ 5 分

(II) 由柯西不等式, 得 $(1^2 + 2^2)(a^2 + b^2) \geq (a+2b)^2 \geq 16$, 8 分

当 $a = \frac{4}{5}, b = \frac{8}{5}$ 时, $a^2 + b^2$ 取得最小值 $\frac{16}{5}$ 10 分