成都七中高 2023 届二诊模拟测试（理科数学）

一、选择题：

1.【答案】B.【解析】由题意，$z=\dfrac{4-3\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}=\dfrac{(4-3\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}=\dfrac{7+\mathrm{i}}{2}$，所以 z 的虚部为 $\dfrac{1}{2}$.

2.【答案】B.【解析】平均数为 $\overline{X}=\dfrac{1\times12+2\times5+3\times2+4\times1}{12+5+2+1}=\dfrac{32}{20}=1.6$.

3.【答案】A.【解析】$\sin 2x=-\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{2}\right)=-\left(1-2\sin^2\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\right)=-\left(1-2\times\left(-\dfrac{2}{3}\right)^2\right)=-\dfrac{1}{9}$.

4.【答案】D.【解析】A 集合表示以原点为圆心，2 为半径的圆及其内部的点. B 集合表示直线 $x+ay+3a=0$ 图象上的点. 要保证 $A\cap B$ 只有一个元素，只需要直线与圆 $x^2+y^2=4$ 相切即可. 得到 $\dfrac{|3a|}{\sqrt{1+a^2}}=2$，所以 $a=\pm\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$. 答案 D.

5.【答案】A.【解析】若 S_3、S_9、S_6 成等差数列，则 $S_3+S_6=2S_9$，显然，公比 $q\neq1$，则 $\dfrac{a_1(1-q^3)}{1-q}+\dfrac{a_1(1-q^6)}{1-q}=\dfrac{2a_1(1-q^9)}{1-q}$，化简得：$1+q^3=2q^6$. 所以 a_2、a_8、a_5 一定是等差数列.

6.【答案】C.【解析】由题意，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=bc\cos A=4$，$\triangle ABC$ 的面积为 $\dfrac{1}{2}bc\sin A=6$，两式相除得到 $\tan A=3$. 所以 $\dfrac{\sin B\cos C+\cos B\sin C}{\sin A+3\cos A}=\dfrac{\sin(B+C)}{\sin A+3\cos A}=\dfrac{\sin A}{\sin A+3\cos A}=\dfrac{\tan A}{\tan A+3}=\dfrac{1}{2}$.

7.【答案】C.【解析】要检验命题，需要保证原命题的条件成立时，结论一定成立，因此需要检测①；同时要保证命题的逆否命题“如果卡片的另一面是奇数，则卡面的一面不是元音字母.”因此需要检查④. 注意，因为并没有要求另一面是偶数的卡牌前面是否为元音字母，也就是说无论③的另一面是否为元音字母，这都不影响命题的成立与否，所以不需要检查③. 答案选 C.

8.【答案】A【解析】当 $n=1$ 时，$\dfrac{2}{a_1}=6$，所以 $a_1=\dfrac{1}{3}$；

当 $n\geq2$ 时，$\dfrac{2}{a_1}+\dfrac{2}{2a_2}+\dfrac{2}{3a_3}+\dots+\dfrac{2}{(n-1)a_{n-1}}=(n-1)^2+5(n-1)$，所以 $\dfrac{2}{na_n}=2n+4$，所以

$a_n=\dfrac{1}{n(n+2)}$. 当 $n=1$ 时，上式也满足，所以 $a_n=\dfrac{1}{n(n+2)}$，对任意 $n\geq1$.

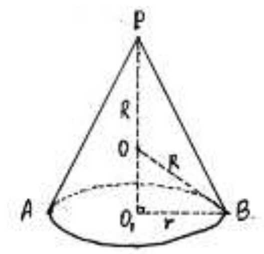
又因为 $a_n=\dfrac{1}{n(n+2)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+2}\right)$，所以有：

$$S_n=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\dots+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right),$$

所以 $S_8=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{9}-\dfrac{1}{10}\right)=\dfrac{29}{45}$.

9.【答案】B.　　10.【答案】D.

11.【答案】C.【解析】如图，设圆锥的底面半径为 r，球半径 $R=5$，球心为 O. 过圆锥的顶点 P 作底面的垂线 PO_1，垂足为 O_1. 则球心 O 必定在 PO_1 上，连接 OB，则 $|OO_1|=\sqrt{25-r^2}$.



所以圆锥的高 $h=|PO|+|OO_1|$ 或者 $h=|PO|-|OO_1|$. 要求体积的最大值，所以取 $h=|PO|+|OO_1|$.

则 $V(r)=\dfrac{1}{3}\pi r^2\left(5+\sqrt{25-r^2}\right)$，$0<r\leq5$.

令 $\sqrt{25-r^2}=t$，$0<t\leq5$. 则 $V(t)=\dfrac{\pi}{3}(25-t^2)(5+t)$.

$$V'(t)=\frac{\pi}{3}\left[-2t(5+t)+(25-t^2)\right]=\frac{\pi}{3}(-3t^2-10t+25)=-\frac{\pi}{3}(3t-5)(t+5),$$

所以 $V(t)$ 在 $\left(0,\dfrac{5}{3}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\dfrac{5}{3},5\right]$ 上单调递减，所以当 $t=\dfrac{5}{3}$ 时，圆锥体积最大.

此时，$r=\sqrt{25-t^2}=\dfrac{10\sqrt{2}}{3}$.

12.【答案】B.【解析】根据题意，$2S_n=a_n^2+a_n$. 当 $n=1$ 时，$a_1^2-a_1=0$，因为$\{a_n\}$各项均为正整数，所以 $a_1=1$. 当 $n\geq 2$ 时，$2S_{n-1}=a_{n-1}^2+a_{n-1}$，则 $2(S_n-S_{n-1})=(a_n^2+a_n)-(a_{n-1}^2+a_{n-1})$，化简整理得：$(a_n-a_{n-1})(a_n+a_{n-1})=a_n+a_{n-1}$，因为$\{a_n\}$各项均为正整数，所以 $a_n+a_{n-1}>0$，所以 $a_n-a_{n-1}=1$ 为定值，所以$\{a_n\}$为等差数列，可得 $a_n=n$. 又因为集合$\{1,2,3,\ldots,n\}$的子集个数为 2^n 个，所以 $b_n=2^n$. 所以 $f_k(x)=\sum_{i=1}^{k}\frac{\sin(ix)}{2^i}$.

①当 $k=1$ 时，$f_1(x)=\frac{\sin x}{2}$，所以 $f_1\left(2x+\frac{3\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}\sin\left(2x+\frac{3\pi}{4}\right)$，当 $x=\frac{2023\pi}{8}$ 时，

$f_1\left(2\times\frac{2023\pi}{8}+\frac{3\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}\sin\left(\frac{1013\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}\sin\left(506\pi+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}$. 该命题为真命题.

②当 $k=2$ 时，$f_2(x)=\frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{4}\sin 2x=\frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{2}\sin x\cos x$，

所以 $g(x)=\frac{f_2(x)}{\sin x}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos x$，且定义域满足 $\sin x\neq 0$，即 $\cos x\neq 1$，且 $\cos x\neq -1$.
令 $h(x)=2[g(x)]^3-3[g(x)]^2+g(x)=0$，可得 $g(x)\cdot(2g(x)-1)\cdot(g(x)-1)=0$，所以对应零点为 $g(x)=0$，或 $g(x)=\frac{1}{2}$，或 $g(x)=1$；亦即 $\cos x=-1$（舍去），或 $\cos x=0$，或 $\cos x=1$（舍去）. 所以在区间$[a,a+2022\pi)$上 $h(x)$的零点等价于 $\cos x$ 在区间$[a,a+2022\pi)$上的零点. 又因为 $\cos x$ 对任意实数 a，在一个周期内有且只有两个零点，所以在$[a,a+2022\pi)$上（共 1011 个周期）恰好有 2022 个零点. 该命题为真命题.

③ 特别地，当 $k=1$ 时，$f_1(x)=\frac{\sin x}{2}$，不妨取 $a=0$，结合图形与定积分的几何意义可知，至少当 $t=2\pi$ 时，才有积分 $\int_0^{2\pi}f_1(x)\mathrm{d}x=0$. 该命题为假命题.

④对任意实数 x，无论正整数 k 去何值，由绝对值不等式以及 $|\sin x|\leq 1$，可知，都有

$$|f_k(x)|=\left|\sum_{i=1}^{k}\frac{\sin(ix)}{2^i}\right|\leq\sum_{i=1}^{k}\left|\frac{\sin(ix)}{2^i}\right|\leq\sum_{i=1}^{k}\left|\frac{1}{2^i}\right|=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^k}=1-\frac{1}{2^k}<1.$$

二、填空题：本题共 **4** 小题，每小题 **5** 分，共 **20** 分

13.【答案】1080.　14.【答案】$\frac{14}{3}$.

15.【答案】38.4.

【解析】根据题意，$6.6=5.5e^{12k}$，$2.2=1.1e^{12l}$，化简为：$\frac{6}{5}=e^{12k}$，$2=e^{12l}$，两式相除可以得到：$12(l-k)=\ln\frac{5}{3}=\ln 5-\ln 3$，所以 $l-k=\frac{\ln 5-\ln 3}{12}$.

另一方面，如果两个公司的股价相等，则 $5.5e^{kt}=1.1e^{lt}$，则 $5=e^{(l-k)t}$，所以$(l-k)t=\ln 5$，所以 $t=\frac{\ln 5}{l-k}=\frac{12\ln 5}{\ln 5-\ln 3}\approx\frac{12\times 1.6}{1.6-1.1}=38.4.$，

16.【答案】$(-\infty,0]\cup\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$.

【解析】因为 $f'(x)=\frac{1}{x}-k\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$，则 $f'(x)\leq 0$ 或 $f'(x)\geq 0$；所以 $k\geq\frac{x}{x^2+1}$ 或 $k\leq\frac{x}{x^2+1}$；因为 $0<\frac{x}{x^2+1}\leq\frac{1}{2}$，所以 k 的取值范围是$(-\infty,0]\cup\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$.

三、解答题

17.解：（1）$f(x)=\vec{a}\cdot\vec{b}+2=(\sin x+\cos x)(\sin x-\cos x)+2\sin x\cos x+2$

$=\sin^2 x-\cos^2 x+\sin 2x+2=\sin 2x-\cos 2x+2=\sqrt{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)+2$.　…3 分

由 $-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leq 2x-\frac{\pi}{4}\leq\frac{\pi}{2}+2k\pi$（$k\in\mathbf{Z}$）解得；$-\frac{\pi}{8}+k\pi\leq x\leq\frac{3\pi}{8}+k\pi$（$k\in\mathbf{Z}$），

所以 $f(x)$的单调增区间为$\left[-\frac{\pi}{8}+k\pi,\frac{3\pi}{8}+k\pi\right]$（$k\in\mathbf{Z}$）.　…6 分

（2）由 $g(x)=0$ 得到 $f(x)=3$. 所以 $\sqrt{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=1$，所以 $\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$.　　…8 分

所以 $2x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}+2k\pi$ 或 $2x-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$.

所以 $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$ 或 $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$.　　…10 分

又因为 $x\in[0,2\pi]$，所以 $x=\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4},\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}$.

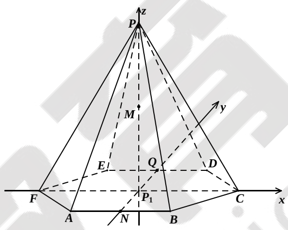
所以集合 $A=\left\{\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4},\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right\}$.　　… 12 分

18.（1）证明：连接 AD、CE，因为 P_1 是正六边形的中心，

所以 P_1 在直线 AD 上. 所以 $PP_1\subset$ 平面 PAD.

又因为 $PP_1\perp$ 平面 $ABCDEF$，$CE\subset$ 平面 $ABCDEF$，

所以 $PP_1\perp CE$.　　…2 分



正六边形中，因为 $AD//BC//EF$，且正六边形内角为 $120°$，

所以 $\angle ADC=60°$.

又因为 $\triangle DEC$ 中，$DE=DC$，$\angle EDC=120°$，

所以 $\angle DCE=30°$. 所以 $\angle ADC+\angle DCE=90°$.

所以 $AD\perp EC$.　　…4 分

又因为 AD、PP_1 都在平面 PAD 内，且 AD 与 PP_1 相交于点 P_1.

所以 $EC\perp$ 平面 PAD.　　…5 分

又因为 $EC\subset$ 平面 PEC，所以平面 $PAD\perp$ 平面 PEC.　　…6 分

（2）**解**：取 AB、DE 上的中点，分别记为 N、Q，如图所示，由于 $ABCDEF$ 为正六边形，

所以 $NQ\perp FC$，所以 P_1P、P_1C、P_1Q 三条直线两两垂直.

所以如图所示，以 P_1 为坐标原点，射线 P_1C、P_1Q、P_1P 分别为 x 轴正方向，y 轴正方向、z 轴正方向建立空间直角坐标系.

因为 $AB=2\sqrt{3}$，且 $PP_1=4$，点 M 在线段 PP_1 上，所以得到各个点的坐标为:

$A\left(-\sqrt{3},-3,0\right)$，$B\left(\sqrt{3},-3,0\right)$，$N(0,-3,0)$，$D\left(\sqrt{3},3,0\right)$，$E\left(-\sqrt{3},3,0\right)$，$Q(0,3,0)$，

$P(0,0,4)$，$P_1(0,0,0)$，设 $M(0,0,t)$（$0\le t\le 4$）.

设平面 PDE 的法向量为 $\overrightarrow{n_1}=(x_1,y_1,z_1)$，$\overrightarrow{ED}=\left(2\sqrt{3},0,0\right)$，$\overrightarrow{PQ}=(0,3,-4)$，

由 $\begin{cases}\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{ED}=2\sqrt{3}x_1=0,\\ \overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{PQ}=3y_1-4z_1=0,\end{cases}$ 不妨取 $z_1=3$，平面 PDE 的一个法向量为 $\overrightarrow{n_1}=(0,4,3)$.　…8 分

设平面 MAB 的法向量为 $\overrightarrow{n_2}=(x_2,y_2,z_2)$，$\overrightarrow{AB}=\left(2\sqrt{3},0,0\right)$，$\overrightarrow{NM}=(0,3,t)$，

由 $\begin{cases}\overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{AB}=2\sqrt{3}x_2=0,\\ \overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{NM}=3y_2+tz_2=0,\end{cases}$ 不妨取 $z_2=3$，平面 MAB 的一个法向量为 $\overrightarrow{n_2}=(0,-t,3)$. …10 分

因为平面 MAB 与平面 PDE 所形成的锐二面角的余弦值为 $\frac{\sqrt{10}}{10}$，所以 $\left|\cos\langle\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}\rangle\right|=\frac{\sqrt{10}}{10}$.

所以 $\left|\frac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{n_2}\right|}\right|=\frac{\sqrt{10}}{10}$，即 $\left|\frac{-4t+9}{5\times\sqrt{t^2+9}}\right|=\frac{\sqrt{10}}{10}$，化简得：$3t^2-16t+13=0$.

解得：$t=1$ 或 $t=\frac{13}{3}>4$（舍去）. 所以 $MP_1=1$. 又 $\overrightarrow{PM}=\lambda\overrightarrow{MP_1}$，所以 $\lambda=3$.　　…12 分

19.解：（1）根据条件，重新画出列联表如下：

	比较支持政策	反对政策	合计
学生	35	5	40
教职工	45	45	90
合计	80	50	130

假设 H_0：校内人员的身份（学生/教职工）和态度（比较支持/反对）是相互独立的.

则统计检验量 $K^2=\frac{130(35\times45-5\times45)^2}{40\times90\times80\times50}=\frac{1053}{64}\approx16.45>7.879$，

所以拒绝假设 H_0，我们有 99.5%以上的把握认为校内人员的身份（学生/教职工）和态度（比较支持/反对）是相关的. …6 分

（2）（i）因为 $P(A)=\frac{30}{160}=\frac{3}{16}$，$P(B)=\frac{65}{160}=\frac{13}{32}$，$P(A\cap B)=\frac{15}{160}=\frac{3}{32}$，

所以 $P(A\cap B)\neq P(A)P(B)$. 因此事件 A 与事件 B 不是相互独立事件. …9 分

（ii）根据题意，样本中支持政策的教职工人数为 20 人，占比为 $p=\frac{20}{160}=\frac{1}{8}$，用样本估计总体，所以从总体中随机抽取一人，这个人是持支持政策的教职工的概率为 $p=\frac{1}{8}$. 因为人数很多，所以 3 次抽取可以近似看成是 3 次独立重复试验，于是随机变量 X 服从与二项分布，所以 $X\sim B\left(3,\frac{1}{8}\right)$. 则 $P(X\geq 1)=1-P(X=0)=1-C_3^0\left(\frac{1}{8}\right)^0\left(\frac{7}{8}\right)^3=1-\frac{343}{512}=\frac{169}{512}$. …11 分

人数 X 的期望为 $E(X)=3\times\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$. …12 分

20.解：（1）抛物线 C_2：$y^2=4ax$ 的焦点为 $B(a,0)$，所以抛物线的准线方程为 $x=-a$.

设点 $P(x_p,y_p)$. 过点 P 作准线 $x=-a$ 的垂线 PK，垂足为 K. 所以 $|PB|=\frac{6}{5}a=|PK|=|x_p+a|$，

因为点 P 在第一象限，所以可得点 P 的坐标为 $x_p=\frac{1}{5}a$，代入椭圆方程解得 $y_p=\frac{2}{\sqrt{5}}a$.

根据点 P 在椭圆上，将 P 点坐标代入椭圆方程，得到 $\frac{a^2}{b^2}=\frac{6}{5}$. 即 $5a^2=6b^2=6(a^2-c^2)$，

所以 $a^2=6c^2$，则椭圆 E 的离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{6}}{6}$. …4 分

（2）因为椭圆 C_1 的焦距为 2，所以 $2c=2$，所以 $c=1$，

所以椭圆 C_1 方程为 $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{5}=1$.

抛物线 C_2 的方程为 $y^2=4\sqrt{6}x$. 且 $B(\sqrt{6},0)$，$|\overrightarrow{OB}|=\sqrt{6}$.

因为直线 l 过 B 且不与坐标轴垂直，设直线 l 的方程为 $x=my+\sqrt{6}$，$m\in\mathbf{R}$，且 $m\neq 0$.

设点 $D(x_0,y_0)$，联立 l 与 C_1：$\begin{cases}x=my+\sqrt{6},\\5x^2+6y^2=30,\end{cases}$ 消去 x 得：$(5m^2+6)y^2+10\sqrt{6}my=0$.

解得 $y_0=\frac{-10\sqrt{6}m}{5m^2+6}$，所以 $|\overrightarrow{BD}|=\sqrt{1+m^2}\,|y_0-0|=\frac{10\sqrt{6}|m|\cdot\sqrt{1+m^2}}{5m^2+6}$. …6 分

设点 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，联立 l 与 C_2：$\begin{cases}x=my+\sqrt{6},\\y^2=4\sqrt{6}x,\end{cases}$ 消去 x 得：$y^2-4\sqrt{6}my-24=0$.

因为 $\Delta>0$，所以 $y_1+y_2=4\sqrt{6}m$.

所以 $|\overrightarrow{MN}|=x_1+x_2+2\sqrt{6}=m(y_1+y_2)+4\sqrt{6}=4\sqrt{6}(m^2+1)$. …8 分

根据题意，$|\overrightarrow{BD}|^2=\lambda|\overrightarrow{MN}|\cdot|\overrightarrow{OB}|$，将上面求得的 $|\overrightarrow{BD}|$、$|\overrightarrow{MN}|$、$|\overrightarrow{OB}|$ 分别代入，可得：

$\left(\frac{10\sqrt{6}|m|\cdot\sqrt{1+m^2}}{5m^2+6}\right)^2=\lambda\times\sqrt{6}\times 4\sqrt{6}(m^2+1)$，化简得：$\lambda=\frac{25m^2}{(5m^2+6)^2}$，$m\neq 0$.

所以 $\lambda=\frac{25m^2}{(5m^2+6)^2}=\frac{25m^2}{25m^4+60m^2+36}=\frac{25}{25m^2+\frac{36}{m^2}+60}$， …10 分

因为 $25m^2+\frac{36}{m^2}+60\geq 120$，所以 $0<\lambda\leq\frac{25}{120}=\frac{5}{24}$.

所以实数 λ 的取值范围为 $\left(0,\frac{5}{24}\right]$. …12 分

21.解：（1）因为 $f'(x)=2x+a(x+1)e^x$， …1 分

所以函数 $f(x)$的图象在 $x=2$ 处的切线斜率为 $f'(2)=4+3ae^2$，

又因为 $f(2)=4+3ae^2$，

所以函数 $f(x)$的图象在 $x=2$ 处的切线方程为：$y-4-3ae^2=(4+3ae^2)(x-2)$． …3 分

又因为这条切线过点(3, 14)，代入解得 $a=\frac{1}{e^2}$． …4 分

（2）当 $a=1$ 时，$g(x)=\ln(x^2+e^x+e^2)$，定义域为 **R**.

（i）因为对任意实数 x，都有 $g(x)-bx\geq 0$，即 $\ln(x^2+e^x+e^2)\geq bx$，对 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立.

①当 $x=0$ 时，不等式显然对任意实数 b 都成立. …5 分

②当 $x>0$ 时，必有 $b\leq\frac{\ln(x^2+e^x+e^2)}{x}$ 恒成立，记 $\varphi(x)=\frac{\ln(x^2+e^x+e^2)}{x}$.

则 $\varphi(x)=\frac{\ln(x^2+e^x+e^2)}{x}>\frac{e^x}{x}=1$，

令 $h(x)=x^2+e^x+e^2-e^{x+3}$，$x\geq 0$，则 $h(0)=1+e^2-e^3<0$，$h'(x)=2x+e^x-e^{x+3}$，$h'(0)=1-e^3<0$，$h''(x)=2+e^x-e^{x+3}<0$ 恒成立，所以 $h'(x)$在$[0,+\infty)$单调递减，于是 $h'(x)<h'(0)<0$，所以函数 $h(x)$在$[0,+\infty)$单调递减，所以 $h(x)<0$ 对任意的 $x\geq 0$.

由此，$\varphi(x)=\frac{\ln(x^2+e^x+e^2)}{x}<\frac{\ln(e^{x+3})}{x}=\frac{x+3}{x}=1+\frac{3}{x}$.

所以$1<\varphi(x)=\frac{\ln(x^2+e^x+e^2)}{x}<1+\frac{3}{x}$. 因为当 x 趋向于正无穷时，$1+\frac{3}{x}$ 也会趋于 1，所以 $b\leq\varphi(x)$ 要恒成立，只需要 $b\leq 1$ 即可. …7 分

③当 $x<0$ 时，必有 $b\geq\frac{\ln(x^2+e^x+e^2)}{x}$ 恒成立，记 $\varphi(x)=\frac{\ln(x^2+e^x+e^2)}{x}$.

因为当 $x<0$ 时，$\ln(x^2+e^x+e^2)>\ln e^2=2>0$，所以 $\varphi(x)=\frac{\ln(x^2+e^x+e^2)}{x}<0$.

又因为当 $x<-e-1$ 时，$e^x<e^0=1$，$1+e^2<1+2e+e^2<x^2$，所以 $\ln(x^2+e^x+e^2)<\ln(x^2+1+e^2)<\ln(2x^2)$. 又 $x<0$，所以 $\varphi(x)=\frac{\ln(x^2+e^x+e^2)}{x}>\frac{\ln(2x^2)}{x}=\frac{\ln 2+2\ln(-x)}{x}$.

记 $k(x)=\frac{\ln 2+2\ln(-x)}{x}$，$x<-e-1$；

则 $k'(x)=\frac{2-\ln 2-2\ln(-x)}{x^2}$，因为 $x<-e-1$，所以 $\ln(-x)>\ln(e+1)>1$，所以 $2-\ln 2-2\ln(-x)<2-\ln 2-2<0$，所以 $k(x)$在$(-\infty,-e-1)$上单调递减，且恒小于 0. 所以当 x 趋向于负无穷时，$k(x)$趋向于 0.

所以 $\varphi(x)$ 夹在 $k(x)$上方，且在 x 轴下方，所以要保证 $b\geq\frac{\ln(x^2+e^x+e^2)}{x}$ 恒成立，等价于 $b\geq 0$. …9 分

综上所述，b 的取值范围是 $[0,1]$.

方法二（洛必达法则处理）：因为对任意实数 x，都有 $g(x)-bx\geq 0$，

当 $x=0$ 时，不等式显然对任意实数 b 都成立. …5 分

当 $x>0$ 时，必有 $b\leq\frac{\ln(x^2+e^x+e^2)}{x}$ 恒成立，记 $\varphi(x)=\frac{\ln(x^2+e^x+e^2)}{x}$.

则 $\varphi'(x)=\frac{2x^2+xe^x-(x^2+e^x+e^2)\ln(x^2+e^x+e^2)}{x^2(x^2+e^x+e^2)}$

$=\frac{(2-\ln(x^2+e^x+e^2))x^2+e^x(x-\ln(x^2+e^x+e^2))-e^2\ln(x^2+e^x+e^2)}{x^2(x^2+e^x+e^2)}$，

因为 $g(x)=\ln(x^2+e^x+e^2)>\ln e^2=2$，所以$(2-\ln(x^2+e^x+e^2))x^2<0$，

因为 $g(x)=\ln(x^2+e^x+e^2)>\ln e^x=x$，所以$(x-\ln(x^2+e^x+e^2))e^x<0$，

所以 $\varphi'(x)<0$，即 $\varphi(x)$ 在$(0,+\infty)$上单调递减.

当 x 趋于正无穷大时，因为满足洛必达法则，所以

$$\lim_{x\to+\infty}\varphi(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(x^2+e^x+e^2\right)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2x+e^x}{x^2+e^x+e^2}}{1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2+e^x}{2x+e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2+e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x}=1,$$

所以只用满足 $b\le 1$ 即可. …7 分

当 $x<0$ 时，必有 $b\ge\dfrac{\ln\left(x^2+e^x+e^2\right)}{x}$ 恒成立，仍旧记 $\varphi(x)=\dfrac{\ln\left(x^2+e^x+e^2\right)}{x}$.

则 $\varphi'(x)=\dfrac{2x^2+xe^x-\left(x^2+e^x+e^2\right)\ln\left(x^2+e^x+e^2\right)}{x^2\left(x^2+e^x+e^2\right)}$

$$=\frac{\left(2-\ln\left(x^2+e^x+e^2\right)\right)x^2+e^x\left(x-\ln\left(x^2+e^x+e^2\right)\right)-e^2\ln\left(x^2+e^x+e^2\right)}{x^2\left(x^2+e^x+e^2\right)},$$

因为 $g(x)=\ln(x^2+e^x+e^2)>\ln e^2=2$，所以 $(2-\ln(x^2+e^x+e^2))x^2<0$，

因为 $g(x)=\ln(x^2+e^x+e^2)>\ln e^x=x$，所以 $(x-\ln(x^2+e^x+e^2))e^x<0$，

所以 $\varphi'(x)<0$，即 $\varphi(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减.

当 x 趋于负穷大时，因为满足洛必达法则，所以

$$\lim_{x\to-\infty}\varphi(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln\left(x^2+e^x+e^2\right)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{2x+e^x}{x^2+e^x+e^2}}{1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2+e^x}{2x+e^x}=0$$（不可继续使用洛必达），

所以只用满足 $b\ge 0$ 即可.

综上所述，b 的取值范围是 $[0,1]$. …9 分

（ii）由（i），当 $x\ge 0$ 时，$g(x)\ge x$，且因为 $g(x)=\ln(x^2+e^x+e^2)>\ln e^2=2$. 所以 $g(x)$ 在 $x\ge 0$ 上的图象夹在曲线 $y=2$，$y=x$ 之间，因此，对于图象上任意两点 M、N，必有 $\angle MON<45°$ 恒成立，所以不存在这样的两点 M、N，使得以 MN 为直径的圆恰好过原点 O. …12 分

22.解：（1）令 $x=0$，可得 $t=2$，所以 $B(0,\ln 2)$； …1 分

令 $y=0$，可得 $t=1$，所以 $A(e^2-e,0)$； …2 分

所以 $|AB|=\sqrt{(\ln 2)^2+\left(e^2-e\right)^2}>\sqrt{\left(e^2-e\right)^2}=e^2-e=e(e-1)$， … 4 分

因为 $e>2$，所以 $|AB|>2$. …5 分

（2）因为 $B(0,\ln 2)$，所以圆 B 的普通方程为：$x^2+(y-\ln 2)^2=(\ln 2)^2$.

展开得到：$x^2+y^2-(2\ln 2)y=0$. …8 分

因为 $x^2+y^2=\rho^2$，$y=\rho\sin\theta$，

所以得到圆 B 的极坐标方程为 $\rho^2=(2\ln 2)\cdot\rho\cdot\sin\theta$，

化简得：$\rho=(2\ln 2)\cdot\sin\theta$. …10 分

23.解：（1）方法 1：当 $x\le-\dfrac{3}{2}$ 时，$f(x)=-4x-2\le 10$，解得：$-3\le x\le-\dfrac{3}{2}$.

当 $-\dfrac{3}{2}<x\le\dfrac{1}{2}$ 时，$f(x)=4\le 10$ 成立，所以 $-\dfrac{3}{2}<x\le\dfrac{1}{2}$.

当 $x>\dfrac{1}{2}$ 时，$f(x)=4x+2\le 10$，解得：$\dfrac{1}{2}<x\le 2$.

综上所述，不等式的解集为 $[-3,2]$. …5 分

方法 2：因为 $f(x)=|2x-1|+|2x+3|\le|4x+2|$，

所以 $|4x+2|\le 10$ 即可，解得：不等式的解集为 $[-3,2]$. …5 分

（2）$f(x)\ge|(2x-1)-(2x+3)|=4$，所以 $m=4$. … 6 分

所以 $a+b=4$，所以 $4=a+b\ge 2\sqrt{ab}$，所以 $\dfrac{1}{\sqrt{ab}}\ge\dfrac{1}{2}$，所以 $\dfrac{1}{ab}\ge\dfrac{1}{4}$，

所以 $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}\ge\dfrac{2}{ab}\ge\dfrac{1}{2}$，当且仅当 $a=b=2$ 时，等号成立. …10 分