成都七中高2023届二诊模拟测试（文科数学参考答案）

一、选择题

1.【答案】B.【解析】由题意，$z=\frac{4-3\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}=\frac{(4-3\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}=\frac{7+\mathrm{i}}{2}$，所以 z 的虚部为 $\frac{1}{2}$.

2.【答案】B.【解析】平均数为 $\overline{X}=\frac{1\times12+2\times5+3\times2+4\times1}{12+5+2+1}=\frac{32}{20}=1.6$.

3.【答案】A.【解析】$\sin2x=-\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)=-\left(1-2\sin^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right)=-\left(1-2\times\left(-\frac{2}{3}\right)^2\right)=-\frac{1}{9}$.

4.【答案】D.【解析】A 集合表示以原点为圆心，2 为半径的圆及其内部的点. B 集合表示直线 $x+ay+3a=0$ 图象上的点. 要保证 $A\cap B$ 只有一个元素，只需要直线与圆 $x^2+y^2=4$ 相切即可. 得到 $\frac{|3a|}{\sqrt{1+a^2}}=2$，所以 $a=\pm\frac{2\sqrt{5}}{5}$. 答案 D.

5.【答案】C.【解析】要检验命题，需要保证原命题的条件成立时，结论一定成立，因此需要检测①；同时要保证命题的逆否命题“如果一个人没有年满 20 岁，则这个人不能喝酒.”因此需要检查④. 答案选 C.

6.【答案】A.【解析】若 S_3、S_9、S_6 成等差数列，则 $S_3+S_6=2S_9$，显然，公比 $q\neq1$，则 $\frac{a_1(1-q^3)}{1-q}+\frac{a_1(1-q^6)}{1-q}=\frac{2a_1(1-q^9)}{1-q}$，化简得：$1+q^3=2q^6$. 所以 a_2、a_8、a_5 一定是等差数列.

7.【答案】C.【解析】由题意，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=bc\cos A=4$，$\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{1}{2}bc\sin A=6$，两式相除得到 $\tan A=3$. 所以 $\frac{\sin B\cos C+\cos B\sin C}{\sin A+3\cos A}=\frac{\sin(B+C)}{\sin A+3\cos A}=\frac{\sin A}{\sin A+3\cos A}=\frac{\tan A}{\tan A+3}=\frac{1}{2}$.

8.【答案】D.　　9.【答案】B.

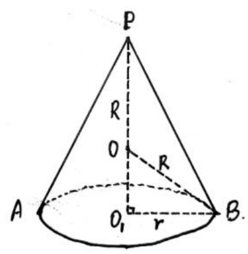
10.【答案】A【解析】由累加法可得：

$$\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n-1}}\right)+\left(\frac{1}{a_{n-1}}-\frac{1}{a_{n-2}}\right)+\dots+\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_1}\right)=\left(2n+2(n-1)+\dots+(2\times1+2)\right),$$

所以 $\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_1}=n^2+n-2$，又因为 $a_1=\frac{1}{2}$，所以 $a_n=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$，

所以 $S_{2023}=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\dots+\left(\frac{1}{2023}-\frac{1}{2024}\right)=1-\frac{1}{2024}=\frac{2023}{2024}$.

11.【答案】C.



【解析】如图，设圆锥的底面半径为 r，球半径 $R=5$，球心为 O. 过圆锥的顶点 P 作底面的垂线 PO_1，垂足为 O_1. 则球心 O 必定在 PO_1 上，连接 OB，则 $|OO_1|=\sqrt{25-r^2}$.

所以圆锥的高 $h=|PO|+|OO_1|$ 或者 $h=|PO|-|OO_1|$. 要求体积的最大值，所以取 $h=|PO|+|OO_1|$.

则 $V(r)=\frac{1}{3}\pi r^2\left(5+\sqrt{25-r^2}\right)$，$0<r\leq5$.

令 $\sqrt{25-r^2}=t$，$0<t\leq5$. 则 $V(t)=\frac{\pi}{3}(25-t^2)(5+t)$.

$$V'(t)=\frac{\pi}{3}\left[-2t(5+t)+(25-t^2)\right]=\frac{\pi}{3}(-3t^2-10t+25)=-\frac{\pi}{3}(3t-5)(t+5),$$

所以 $V(t)$ 在 $\left(0,\frac{5}{3}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\frac{5}{3},5\right]$ 上单调递减，所以当 $t=\frac{5}{3}$ 时，圆锥体积最大.

此时，$r=\sqrt{25-t^2}=\frac{10\sqrt{2}}{3}$.

12.【答案】B.

【解析】数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，$a_1=1$，$a_5-a_3=2a_1$. 所以公差 $d=1$，所以 $a_n=n$. 数列 $\{b_n\}$ 是等比数列，$b_1=a_2$，$b_2=a_4$. 所以 $b_1=2$，$b_2=4$，所以 $b_n=2^n$.

① 当 $k=1$ 时，$f_1(x)=\frac{\sin x}{2}$，所以 $f_1\left(2x+\frac{3\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}\sin\left(2x+\frac{3\pi}{4}\right)$，当 $x=\frac{\pi}{8}$ 时，

$f_1\left(2\times\frac{\pi}{8}+\frac{3\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}\sin\pi=0$. 该命题为假命题.

② 当 $k=2022$ 时，$f_{2022}(x)=\frac{\sin(x)}{2}+\frac{\sin(2x)}{2^2}+\ldots+\frac{\sin(2022x)}{2^{2022}}$，所以

$$f_{2022}\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^5}-\frac{1}{2^7}+\ldots+\frac{1}{2^{2021}}=\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{2021}}\times\left(-\frac{1}{4}\right)}{1-\left(-\frac{1}{4}\right)}=\frac{1}{5}\times\left(2+\frac{1}{2^{2021}}\right)$$.该命题为真命题.

③当 $k=2$ 时，$f_2(x)=\frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{4}\sin 2x=\frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{2}\sin x\cos x$，

所以 $g(x)=\frac{f_2(x)}{\sin x}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos x$，且定义域满足 $\sin x\neq 0$，即 $\cos x\neq 1$，且 $\cos x\neq -1$.
令 $h(x)=2[g(x)]^3-3[g(x)]^2+g(x)=0$，可得 $g(x)\cdot(2g(x)-1)\cdot(g(x)-1)=0$，所以对应零点为 $g(x)=0$，或 $g(x)=\frac{1}{2}$，或 $g(x)=1$；亦即 $\cos x=-1$（舍去），或 $\cos x=0$，或 $\cos x=1$（舍去）. 所以在区间$[a, a+2022\pi)$上 $h(x)$的零点等价于 $\cos x$ 在区间$[a, a+2022\pi)$上的零点. 又因为 $\cos x$ 对任意实数 a，在一个周期内有且只有两个零点，所以在$[a, a+2022\pi)$上（共 1011 个周期）恰好有 2022 个零点. 该命题为真命题.

二、填空题

13.【答案】$\frac{11}{4}$.　14.【答案】$\frac{14}{3}$.

15.【答案】42.【解析】因为 A 公司的股价在 $t=0$ 时是每股 5 元人民币，所以 $5=A_0e^0$，所以 $A_0=5$. 经过 12 个月后，得到 $6=5e^{12k}$，所以 $k=\frac{1}{12}\ln\frac{6}{5}$. 根据题意，要股价涨到 10 元，则 $10=5e^{kt}$，所以 $kt=\ln 2$，所以 $t=\frac{\ln 2}{k}=\frac{12\times\ln 2}{\ln 2+\ln 3-\ln 5}\approx\frac{12\times 0.7}{0.7+1.1-1.6}=42$.

16.【答案】$\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$.

【解析】因为 $f'(x)=\frac{1}{x}-k\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$，则 $f'(x)\le 0$；所以 $k\ge\frac{x}{x^2+1}$；因为 $0<\frac{x}{x^2+1}\le\frac{1}{2}$，

所以 k 的取值范围是 $\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$.

三、解答题：共 **70** 分.

17.解：（1）$f(x)=\vec{a}\cdot\vec{b}+2=(\sin x+\cos x)(\sin x-\cos x)+2\sin x\cos x+2$

$=\sin^2 x-\cos^2 x+\sin 2x+2=\sin 2x-\cos 2x+2=\sqrt{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)+2$.　…3 分

由 $-\frac{\pi}{2}+2k\pi\le 2x-\frac{\pi}{4}\le\frac{\pi}{2}+2k\pi$（$k\in\mathbf{Z}$）解得；$-\frac{\pi}{8}+k\pi\le x\le\frac{3\pi}{8}+k\pi$（$k\in\mathbf{Z}$），

所以 $f(x)$的单调增区间为$\left[-\frac{\pi}{8}+k\pi,\frac{3\pi}{8}+k\pi\right]$（$k\in\mathbf{Z}$）.　…6 分

（2）由 $g(x)=0$ 得到 $f(x)=3$. 所以 $\sqrt{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=1$，所以 $\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$.　…8 分

所以 $2x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}+2k\pi$ 或 $2x-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$.

所以 $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$ 或 $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$.　…10 分

又因为 $x\in[0, 2\pi]$，所以 $x=\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4},\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}$.

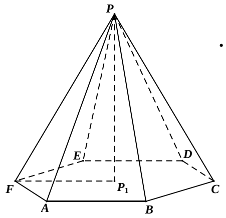
所以集合 $A=\left\{\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4},\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right\}$. … 12 分

18.（1）证明：连接 AD、CE，因为 P_1 是正六边形的中心，

所以 P_1 在直线 AD 上. 所以 $PP_1\subset$ 平面 PAD.

又因为 $PP_1\perp$ 平面 $ABCDEF$，$CE\subset$ 平面 $ABCDEF$，

所以 $PP_1\perp CE$. …2 分



正六边形中，因为 $AD//BC//EF$，且正六边形内角为 120°，

所以 $\angle ADC=60°$.

又因为 $\triangle DEC$ 中，$DE=DC$，$\angle EDC=120°$，

所以 $\angle DCE=30°$. 所以 $\angle ADC+\angle DCE=90°$.

所以 $AD\perp EC$. …4 分

又因为 AD、PP_1 都在平面 PAD 内，且 AD 与 PP_1 相交于点 P_1.

所以 $EC\perp$ 平面 PAD. …5 分

又因为 $EC\subset$ 平面 PEC，所以平面 $PAD\perp$ 平面 PEC. …6 分

（2）解：如图所示，因为 $BC//EF$，所以 BC 与 PF 的夹角等于 $\angle PFE$.

连接 P_1F，因为 $PP_1=6$，$P_1F=AB=4$，所以 $PF=2\sqrt{13}$. …8 分

$\triangle PEF$ 中，$PE=PF=2\sqrt{13}$，$EF=4$，由余弦定理：$\cos\angle PFE=\dfrac{PF^2+EF^2-PE^2}{2\cdot PF\cdot EF}=\dfrac{1}{\sqrt{13}}$.

…10 分

所以异面直线 PF 与 BC 的夹角的正弦值就是 $\sin\angle PFE=\sqrt{1-(\cos\angle PFE)^2}=\dfrac{2\sqrt{39}}{13}$.

…12 分

19.解：（1）根据条件，重新画出列联表如下：

	比较支持政策	反对政策	合计
学生	35	5	40
教职工	45	45	90
合计	80	50	130

假设 H_0：校内人员的身份（学生/教职工）和态度（比较支持/反对）是相互独立的.

则统计检验量 $K^2=\dfrac{130(35\times45-5\times45)^2}{40\times90\times80\times50}=\dfrac{1053}{64}\approx16.45>7.879$，

所以拒绝假设 H_0，我们有 99.5%以上的把握认为校内人员的身份（学生/教职工）和态度（比较支持/反对）是相关的. …6 分

（2）记样本中反对政策的 5 名学生分别为 A、B、C、D、E，则抽取三人可能取到的组合有：$\{ABC\}$，$\{ABD\}$，$\{ABE\}$，$\{ACD\}$，$\{ACE\}$，$\{ADE\}$，$\{BCD\}$，$\{BCE\}$，$\{BDE\}$，$\{CDE\}$ 共 10 种情况. …8 分

其中学生 A 和学生 B 同时被选中的有：$\{ABC\}$，$\{ABD\}$，$\{ABE\}$，共 3 种情况. …10 分

所以概率为 $\dfrac{3}{10}$. … 12 分

20.解：（1）抛物线 C_2：$y^2=4ax$ 的焦点为 $B(a,0)$，所以抛物线的准线方程为 $x=-a$.

设点 $P(x_p,y_p)$. 过点 P 作准线 $x=-a$ 的垂线 PK，垂足为 K. 所以 $|PB|=\dfrac{6}{5}a=|PK|=|x_p+a|$，

因为点 P 在第一象限，所以可得点 P 的坐标为 $x_p=\dfrac{1}{5}a$，代入椭圆方程解得 $y_p=\dfrac{2}{\sqrt{5}}a$.

根据点 P 在椭圆上，将 P 点坐标代入椭圆方程，得到 $\dfrac{a^2}{b^2}=\dfrac{6}{5}$. 即 $5a^2=6b^2=6(a^2-c^2)$，

所以 $a^2=6c^2$，则椭圆 E 的离心率 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$. …4 分

（2）因为椭圆 C_1 的焦距为 2，所以 $2c=2$，所以 $c=1$，

所以椭圆 C_1 方程为 $\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{5}=1$.

抛物线 C_2 的方程为 $y^2=4\sqrt{6}x$. 且 $B\left(\sqrt{6},0\right)$，$\left|\overrightarrow{OB}\right|=\sqrt{6}$.　　…6 分

因为直线 l 过 B 且不与坐标轴垂直，设直线 l 的方程为 $x=my+\sqrt{6}$，$m\in\mathbf{R}$，且 $m\neq 0$.

设点 $M(x_1, y_1)$，$N(x_2, y_2)$，联立 l 与 C_2：$\begin{cases}x=my+\sqrt{6},\\ y^2=4\sqrt{6}x,\end{cases}$ 消去 x 得：$y^2-4\sqrt{6}my-24=0$.

所以 $y_1+y_2=4\sqrt{6}m$，$y_1y_2=-24$.　　…8 分

$\triangle OMN$ 面积 $S=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{OB}\right|\cdot\left|y_1-y_2\right|=\frac{\sqrt{6}}{2}\cdot\sqrt{\left(y_1+y_2\right)^2-4y_1y_2}=\frac{\sqrt{6}}{2}\cdot\sqrt{96m^2+96}=12\sqrt{m^2+1}=24$，

所以 $m^2=3$.　　…10 分

所以 $|MN|=\sqrt{1+m^2}\left|y_1-y_2\right|=4\sqrt{6}\left(m^2+1\right)=16\sqrt{6}$.　　…12 分

21.解：（1）因为 $f'(x)=2x+a(x+1)e^x$，　　…2 分

所以函数 $f(x)$的图象在 $x=2$ 处的切线斜率为 $f'(2)=4+3ae^2$，

又因为 $f(2)=4+3ae^2$，

所以函数 $f(x)$的图象在 $x=2$ 处的切线方程为：$y-4-3ae^2=\left(4+3ae^2\right)(x-2)$.　　…4 分

又因为这条切线过点(3, 14)，代入解得 $a=\frac{1}{e^2}$.　　…6 分

（2）当 $x=0$ 时，$f(0)=ae^2\geq 0$，所以必有 $a\geq 0$.　　…7 分

下面证明，当 $a\geq 0$ 时，对任意实数 $x\in\mathbf{R}$，都有 $x^2+axe^x+ae^2\geq 0$ 恒成立.

记 $g(x)=xe^x+e^2$，则 $g'(x)=(x+1)e^x$，

所以 $g(x)$在$(-\infty,-1)$上单调递减，在$(-1,+\infty)$上单调递增，

所以 $g_{\min}=g(-1)=-e^{-1}+e^2>0$.　　…10 分

所以当 $x\in\mathbf{R}$，都有 $a(xe^x+e^2)\geq 0$，

所以当 $a\geq 0$ 时，对任意实数 $x\in\mathbf{R}$，都有 $x^2+axe^x+ae^2\geq 0$ 恒成立.

综上所述，a 的取值范围是$[0,+\infty)$.　　…12 分

22.解：（1）令 $x=0$，可得 $t=2$，所以 $B(0, \ln 2)$；　　…1 分

令 $y=0$，可得 $t=1$，所以 $A(e^2-e, 0)$；　　…2 分

所以 $|AB|=\sqrt{(\ln 2)^2+\left(e^2-e\right)^2}>\sqrt{\left(e^2-e\right)^2}=e^2-e=e(e-1)$，　　… 4 分

因为 $e>2$，所以 $|AB|>2$.　　…5 分

（2）因为 $B(0, \ln 2)$，所以圆 B 的普通方程为：$x^2+(y-\ln 2)^2=(\ln 2)^2$.

展开得到：$x^2+y^2-(2\ln 2)y=0$.　　…8 分

因为 $x^2+y^2=\rho^2$，$y=\rho\sin\theta$，

所以得到圆 B 的极坐标方程为 $\rho^2=(2\ln 2)\cdot\rho\cdot\sin\theta$，

化简得：$\rho=(2\ln 2)\cdot\sin\theta$.　　…10 分

23.解：（1）方法 1：当 $x\leq-\frac{3}{2}$ 时，$f(x)=-4x-2\leq 10$，解得：$-3\leq x\leq-\frac{3}{2}$.

当 $-\frac{3}{2}<x\leq\frac{1}{2}$ 时，$f(x)=4\leq 10$ 成立，所以 $-\frac{3}{2}<x\leq\frac{1}{2}$.

当 $x>\frac{1}{2}$ 时，$f(x)=4x+2\leq 10$，解得：$\frac{1}{2}<x\leq 2$.

综上所述，不等式的解集为$[-3,2]$.　　…5 分

方法 2：因为 $f(x)=|2x-1|+|2x+3|\leq|4x+2|$，

所以$|4x+2|\leq 10$ 即可，解得：不等式的解集为$[-3,2]$.　　…5 分

（2）$f(x)\geq|(2x-1)-(2x+3)|=4$，所以 $m=4$.　　… 6 分

所以 $a+b=4$，所以 $4=a+b\geq 2\sqrt{ab}$，所以 $\frac{1}{\sqrt{ab}}\geq\frac{1}{2}$，所以 $\frac{1}{ab}\geq\frac{1}{4}$，

所以 $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\geq\frac{2}{ab}\geq\frac{1}{2}$，当且仅当 $a=b=2$ 时，等号成立.　　…10 分