

树德中学高 2020 级高三下期开学考试数学试题 (理科)

命题人:

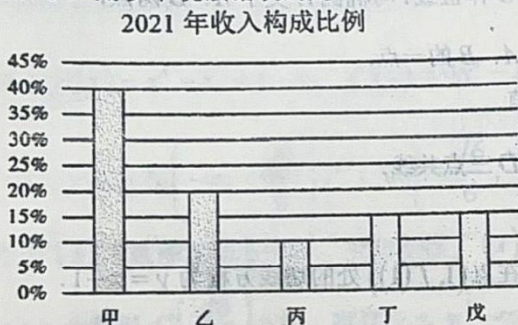
考试时间: 120 分钟 全卷满分: 150 分

一、选择题 (共 12 小题, 每小题 5 分, 满分 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.)

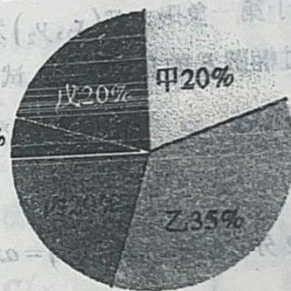
1. 设集合 $A = \{1, 2, x\}$, $B = \{2, x^2\}$, 且 $A \cup B = A$, 则 $x =$ ()
 A. -1 B. 1 C. -1 或 0 D. -1 或 0 或 1

2. 设复数 $z = \frac{1+i}{7+4i}$, 其在复平面内的对应的点记为 Z , 则 ()
 A. z 的虚部为 $-\frac{3}{65}$ B. $\bar{z} = \frac{11}{65} - \frac{3}{65}i$ C. Z 在第四象限 D. $|z| = \frac{8}{65}$

3. 某国有企业响应国家关于进一步深化改革, 加强内循环的号召, 不断自主创新提升产业技术水平, 同时积极调整企业旗下的甲、乙、丙、丁、戊等 5 种产品的结构比例, 近年来取得了显著效果. 据悉该企业 2022 年 5 种系列产品年总收入是 2021 年的 2 倍, 其中 5 种系列产品的年收入构成比例如下图所示. 则以下说法错误的是 ()



2022 年收入构成比例



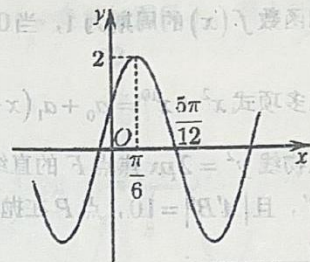
- A. 2022 年甲系列产品收入和 2021 年的一样多
 B. 2022 年乙和丙系列产品收入之和比 2021 年的企业总收入还多
 C. 2022 年丁系列产品收入是 2021 年丁系列产品收入的 $\frac{1}{3}$
 D. 2022 年戊系列产品收入是 2021 年戊系列产品收入的 2 倍还多
4. “攒尖”是中国古代建筑中屋顶的一种结构形式, 依据其不同的形状特征分为圆形攒尖、三角攒尖、四角攒尖、六角攒尖等, 多见于亭阁式建筑. 如图所示, 某园林中的一种亭阁式建筑为六角攒尖, 它的主要部分的轮廓可以近似看作为一个正六棱锥. 设此正六棱锥的侧面等腰三角形的顶角为 2θ , 则该正六棱锥的侧棱长 a 与其底面内切圆半径 r 的比为 ()



- A. $\frac{\sqrt{3}}{3\sin\theta}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{3\cos\theta}$ C. $\frac{1}{2\sin\theta}$ D. $\frac{1}{2\cos\theta}$
5. 已知 $\vec{a} = (1, 2)$, $\vec{b} = (-1, 3)$, 则 $\vec{a} - \vec{b}$ 在 $\vec{a} + \vec{b}$ 方向上的投影所对应向量的坐标为 ()
 A. (0, 1) B. (-1, 0) C. (0, -1) D. (0, 1)

6. 若 $\theta \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$, 且 $\cos^2\theta + \cos\left(2\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{2}$, 则 $\tan\theta =$ ()
 A. $\sqrt{3}$ B. 2 C. 3 D. $2\sqrt{3}$

7. 已知函数 $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi)$ ($x \in \mathbb{R}, A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的部分图象如图所示, 则下列说法正确的是 ()

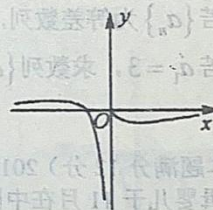
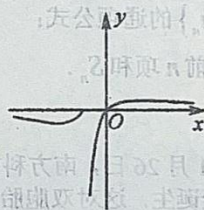
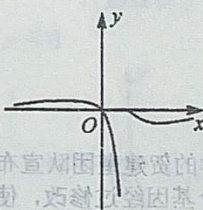
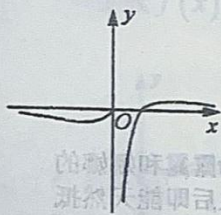


- A. 直线 $x = \pi$ 是函数 $y = f(x)$ 的图象的一条对称轴
 B. 函数 $y = f(x)$ 的图象的对称中心坐标为 $(k\pi - \frac{\pi}{12}, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$
 C. 函数 $y = f(x)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}]$ 上单调递增
 D. 将函数 $y = f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度后, 可得到一个奇函数的图象

8. $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 满足 $(\sin B - \sin C)^2 = \sin^2 A - \sin B \sin C$. 若 $\triangle ABC$ 为锐角三角形, 且 $a = 3$, 则当 $\triangle ABC$ 面积最大时, 其内切圆面积为 ()

- A. 9π B. 3π C. $\frac{9}{4}\pi$ D. $\frac{3}{4}\pi$

9. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \ln x, & x > 0 \\ xe^x, & x \leq 0 \end{cases}$, 则函数 $y = f(1-x)$ 的图象大致是 ()



10. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的右焦点为 F , 两条渐近线分别为 l_1, l_2 , 过 F 且与 l_1 平行的直线与双曲线 C 及直线 l_2 依次交于点 B, D , 点 B 恰好平分线段 FD , 则双曲线 C 的离心率为 ()

- A. $\frac{4}{3}$ B. $\sqrt{2}$ C. $\sqrt{3}$ D. 2

11. 已知 $a = \frac{2}{5}$, $b = e^{-\frac{3}{5}}$, $c = \ln 5 - \ln 4$, 则 a, b, c 的大小关系为 ()

- A. $a > b > c$ B. $a > c > b$ C. $b > a > c$ D. $b > c > a$

12. 已知函数 $f(x) = x^4 - x^2 + x - 1$, 则下列四个说法中正确的个数为 ()

- ① 曲线 $y = f(x)$ 上存在三条互相平行的切线; ② 函数 $y = f(x)$ 有唯一极值点;
 ③ 函数 $y = f(x)$ 有两个零点; ④ 过坐标原点 O 可作曲线 $y = f(x)$ 的切线.

- A. 4 B. 3 C. 2 D. 1

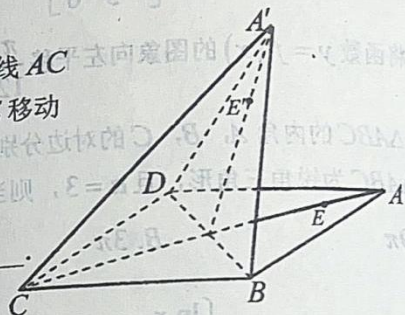
二、填空题：(共4小题，每小题5分，满分20分.)

13. 已知函数 $f(x)$ 的周期为 1, 当 $0 < x \leq 1$ 时, $f(x) = -\ln x$, 则 $a_3 =$ _____.

14. 已知多项式 $x^2 + x^{10} = a_0 + a_1(x+1) + a_2(x+1)^2 + \dots + a_{10}(x+1)^{10}$, 则 $a_3 =$ _____.

15. 过抛物线 $y^2 = 2px$ 焦点 F 的直线 l 与抛物线交于 A, B 两点, 点 P 为 $A'B'$, 且 $|A'B'| = 10$, 点 P 在抛物线的准线上. 若 AP 是 $\angle A'AF$ 的角平分线, 则点 P 到直线 l 的距离为

16. 如图, 已知菱形 $ABCD$ 边长为 6, $\angle ADC = 120^\circ$, E 为对角线 AC 上一点, $AE = \sqrt{3}$. 将 $\triangle ABD$ 沿 BD 翻折到 $\triangle A'BD$ 的位置, 点 E 移动到点 E' , 且二面角 $A'-BD-A$ 的大小为 60° .



(1) 三棱锥 $A'-BCD$ 的外接球的半径为_____;

(2) 过 E' 作平面与该外接球相交, 所得截面面积的最小值为_____.

三、解答题(共6题,满分70分.)

17. (本题满分 12 分) 已知数列 $\{a_n\}$ 中, 对任意的 $n \in N_+$, 都有 $a_n + a_{n+1} = 4n$.

(I) 若 $\{a_n\}$ 为等差数列, 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(II) 若 $a_1 = 3$, 求数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

18. (本题满分 12 分) 2018 年 11 月 26 日, 南方科技大学的贺建奎团队宣布一对名为露露和娜娜的基因编辑婴儿于 11 月在中国健康诞生. 这对双胞胎的一个基因经过修改, 使她们出生后即能天然抵抗艾滋病毒, 这是世界上首例免疫艾滋病的基因编辑婴儿. 当即全球有 122 位生物学领域的科学家联名谴责, 称“此项技术早就可以做”, 但不做的原因是巨大的风险和道德伦理问题, 直指这项所谓研究的生理医学伦理审查形同虚设, 直接进行人体实验, 只能用“疯狂”二字来形容. 针对这件事, 某部门就“基因编辑婴儿”的看法随机抽取了 40 人进行了问卷调查, 其中男、女各 20 人, 将问卷得分情况制作成茎叶图如下. 为便于对调查对象作进一步研究分析, 将得分高于 85 分的称为“A 类”调查对象, 得分不大于 85 分的称为“非 A 类”调查对象.

(I) 某部门想要进一步了解“A类”调查对象的更多信息, 将调查所得的频率视为概率.

①若从“A类”调查对象中抽取2人,求抽取的2人性别不同的概率 $P(A)$;

②若从“A类”调查对象中抽取3人,设被抽到的3人中男、女人数差的绝对值为 X ,求 X 的分布列与数学期望.

(II) 通过问卷调查得到对应 2×2 列联表, 请完成列联表中数据的填写, 并说明是否能够在犯错误的概率不超过 1% 的前提下, 认为调查对象是“A类”与性别有关?
(参考公式与数据, 见 19 题上方)

男	女
8	6
4	2
5	5
8	3
6	4
7	0
9	2
4	5
5	5
8	2
6	5
7	8
4	0
5	2
7	8
9	8
7	8
7	7
6	9
0	4
0	0
0	10
	0
	0
	0

	“非 A 类”调查对象人数	“A 类”调查对象人数	总计
男			
女			
总计			

18 题参考公式与数据

$$K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(a+c)(b+d)(c+d)}, \quad n=a+b+c+d$$

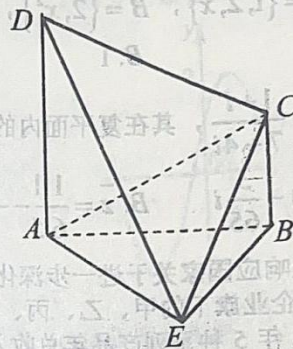
$P(K^2 \geq k_0)$	0.050	0.010	0.001
k_0	3.841	6.635	10.828

19. (本题满分 12 分) 如图, 在几何体 $ABCDE$ 中,
 $AD \perp$ 面 ABE , $AD \parallel BC$, $AD = 2BC$, $AB = BE$.

(I) 求证: 平面 $DCE \perp$ 平面 DAE ;

(II) 若 $AB = 1$, $AE = \sqrt{2}$, 二面角 $B-CE-D$ 的大小为 α ,

且 $|\cos \alpha| = \frac{\sqrt{6}}{6}$, 求 AD 的长.



20. (本题满分 12 分) 已知椭圆 $E: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$, 过原点 O 作直线 l 与椭圆 E 交于 A, B 两点,

其中 $A(x_1, y_1)$ 位于第一象限, $C(x_2, y_2)$ 为椭圆 E 上异于 A, B 的一点.

(I) 若 AC 经过椭圆 E 的右焦点 F , 试求 $S_{\triangle ABC}$ 的最大值.

(II) 若 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$, 记点 $D\left(x_1, \frac{y_1}{2}\right)$, 试证明 B, C, D 三点共线.

21. (本题满分 12 分) 已知函数 $f(x) = ax + \frac{b}{x} + c$ 的图象在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $y = x - 1$.

(I) 用 a 表示 b, c ;

(II) 若 $f(x) - \ln x \geq 0$ 在 $[1, +\infty)$ 上恒成立, 求 a 的取值范围;

(III) 证明: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{2(n+1)} > \frac{1}{2} + \ln(n+1) (n \in \mathbb{N}_+)$.

(选考题) 请在第 22、23 题中任选一题作答. 如果多做, 则按所做的第一题计分.

22. (本题满分 10 分) 在平面直角坐标系 xOy 中, 直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x = -1+t \\ y = t \end{cases}$ (t 为参数),

以坐标原点 O 为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线 C 的极坐标方程为 $\rho = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+\sin^2 \theta}}$.

(I) 求曲线 C 的直角坐标方程;

(II) 若直线 l 与曲线 C 交于 M, N 两点, 求线段 MN 的长.

23. (本题满分 10 分) 已知函数 $f(x) = |x-1| - |x-2|$, $g(x) = |2x-1|$.

(I) 求函数 $f(x)$ 的值域;

(II) 若 $a > 0$, $b > 0$, 且 $a^2 + b^2 = 1$, 不等式 $4f(x) \leq \frac{1}{2a^2} + \frac{1}{2b^2}$ 恒成立, 求实数 x 的取值范围.

树德中学高 2020 级高三下期 2 月开学考试数学试题 (理科) 参考答案

一、选择题:

CBCAC

CCDBB

(CB)

二、填空题:

13. $\ln 2$

14. -120

15. 5

16. (1)

$\sqrt{21}$

(2) 9π

——部分选填题参考解答——

10. 如图, 由题意可知 $\triangle ODF$ 为等腰三角形, $OD = DF$,

则 $x_D = \frac{c}{2}$, 代入渐近线方程 $y = \frac{b}{a}x$, 得 $y_D = \frac{bc}{2a}$, 又 $F(c, 0)$, 可得中点 $B\left(\frac{3c}{4}, \frac{bc}{4a}\right)$,

将其代入双曲线方程, 可得 $\frac{9c^2}{16a^2} - \frac{c^2}{16a^2} = 1$, 整理可得 $e^2 = 2$, $\therefore e = \sqrt{2}$.

11. 联系函数不等式 $e^x \geq x+1$ (当且仅当 $x=0$ 时取等) 和 $\ln x \leq x-1$ (当且仅当 $x=1$ 时取等),

可得: (1) $b = e^{\frac{3}{5}} > -\frac{3}{5} + 1 = \frac{2}{5} = a$; (2) $c = \ln 5 - \ln 4 = \ln \frac{5}{4} < \frac{5}{4} - 1 = \frac{1}{4} < \frac{2}{5} = a$.

从而有 $b > a > c$.

12. $f(x) = x^4 - x^2 + x - 1$, $f'(x) = 4x^3 - 2x + 1$, $f''(x) = 12x^2 - 2 = 12\left(x + \frac{\sqrt{6}}{6}\right)\left(x - \frac{\sqrt{6}}{6}\right)$,

(1) $f'(x)$ 在 $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$ 上, 在 $\left(-\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}\right)$ 上, 在 $\left(\frac{\sqrt{6}}{6}, +\infty\right)$ 上,

则 $f'(x)$ 大致图象如右所示, 可知方程 $f'(x) = k$ 可能有三个根, 故①正确

(2) 计算得 $f'\left(\frac{\sqrt{6}}{6}\right) > 0$, 则存在 $x_0 \in \left(-\infty, -\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$, 使得 $f'(x_0) = 0$,

从而可知 $f(x)$ 在 $(-\infty, x_0)$ 上, $(x_0, +\infty)$ 上, 故②正确

(3) 计算得 $f\left(-\frac{\sqrt{6}}{6}\right) < 0$, 则 $f(x_0) < 0$, $f(x)$ 大致图象如右, 故③正确

(4) 设过原点 O 的直线 $y = kx$ 与 $y = f(x)$ 相切于点 (x_0, y_0) , 则有

$y_0 = x_0^4 - x_0^2 + x_0 - 1$, $k = f'(x_0) = 4x_0^3 - 2x_0 + 1$, $y_0 = kx_0$,

消元整理可得 $3x_0^4 - x_0^2 + 1 = 0$, 易知此方程无解, 故④错误. 综上, 正确的是①②③.

(说明: 由 $f(x) = x^4 - x^2 + x - 1 = (x-1)(x^3 + x^2 + 1)$, 也可以分析 $f(x)$ 的零点个数)

14. 由 $x^2 + x^{10} = (x+1-1)^2 + (x+1-1)^{10}$, 可得 $a_3(x+1)^3 = C_{10}^3(x+1)^3(-1)^7 = -120(x+1)^3$.

15. (请同学们结合此题的学习与研究, 进一步丰富对抛物线焦点弦的典型性质的认识与积累!)

【解法简介】过 F 作 AB 的垂线, 交准线于 M , 连接 MA , 由 $AA' = AF$, 易证 MA 平分 $\angle A'AF$, 则知 M 即已知中的点 P . 连接 PB , 已知 PB 平分 $\angle B'BF$, 可推知 $PA' = PF = PB'$, 则 P 恰为 $A'B'$ 的中点, 故 $PF = PA' = PB' = 5$.

【性质积累】(1) 可以证明, 以焦点弦 AB 为直径的圆必与准线相切, 且切点恰为 $A'B'$ 的中点 P ;

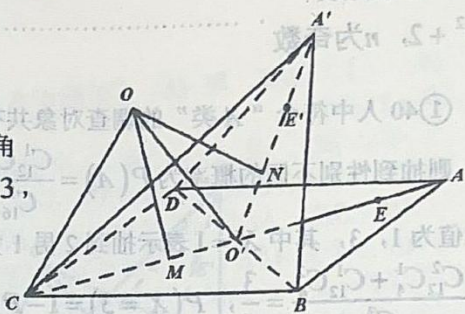
(2) 连接 PF , 可以证明 PF 恰好与此焦点弦 AB 相互垂直;

(3) 连接 PA 、 PB , 可以证明 PA 平分 $\angle A'AF$, PB 平分 $\angle B'BF$. (图略)

16. (1) 由题易知, $\triangle CBD$ 、 $\triangle A'B'D$ 均为等边三角形, 取它们的中心 M 、 N , 过 M 、 N 分别作平面 CBD 、平面 $A'B'D$ 的垂线, 易知两垂线必交于一点 O , 且点 O 正是三棱锥 $A'-BCD$ 的外接球球心. (如图所示)

记 $AC \cap BD = O'$, 则可知二面角 $A'-BD-A$ 的平面角为 $\angle A'OC = 120^\circ$, 在四边形 $MO'NO$ 中, 可求得 $ON = 3$, 则外接球半径 $R = \sqrt{ON^2 + NA'^2} = \sqrt{21}$;

(2) 当截面面积取最小值时, 可知 $OE' \perp$ 截面, 易求得 $|OE'| = 2\sqrt{3}$, 则截面圆半径 $r = \sqrt{R^2 - OE'^2} = 3$, 故其面积 $S = 9\pi$.



三、解答题:

17. 解: (I) 由条件可得 $a_1 + a_2 = 4$, $a_2 + a_3 = 8$,

因为 $\{a_n\}$ 为等差数列, 记公差为 d , 则有 $\begin{cases} 2a_1 + d = 4 \\ 2a_1 + 3d = 8 \end{cases}$, 从而可解得 $a_1 = 1$, $d = 2$,

则 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = a_1 + (n-1)d = 2n-1$5分

(II) 法一: 由 $a_n + a_{n+1} = 4n$, 可得 $a_{n+1} + a_{n+2} = 4(n+1)$, 两式相减可得: $a_{n+2} - a_n = 4$,

又由 $a_1 = 3$, 则 $a_1 + a_2 = 4$, 所以 $a_2 = 1$,

故数列 $\{a_n\}$ 的奇数项构成以 3 为首项, 4 为公差的等差数列;

偶数项构成以 1 为首项, 4 为公差的等差数列.8分

所以, 当 n 为偶数时, $S_n = (a_1 + a_3 + \dots + a_{n-1}) + (a_2 + a_4 + \dots + a_n)$

$$= \frac{n}{2} \times 3 + \frac{\frac{n}{2} \times (\frac{n}{2} - 1)}{2} \times 4 + \frac{n}{2} \times 1 + \frac{\frac{n}{2} \times (\frac{n}{2} - 1)}{2} \times 4 = n^2;$$

当 n 为奇数时, $S_n = S_{n-1} + a_n = (n-1)^2 + 2n+1 = n^2 + 2$11分

综上, $S_n = \begin{cases} n^2, & n \text{ 为偶数} \\ n^2 + 2, & n \text{ 为奇数} \end{cases}$12分

法二: 由 $a_n + a_{n+1} = 4n$ 及 $a_1 = 3$, 可得 $a_1 + a_2 = 4$, 则 $a_2 = 1$, 那么,

当 n 为偶数时, $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_n = (a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) + \dots + (a_{n-1} + a_n)$

$$= \underbrace{4 \times 1 + 4 \times 3 + \dots + 4 \times (n-1)}_{\text{共 } \frac{n}{2} \text{ 项}} = 4 \times \frac{\frac{n}{2} (1 + n-1)}{2} = n^2;$$

当 n 为奇数时, $S_n = a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5) + \dots + (a_{n-1} + a_n)$

$$= 3 + \underbrace{4 \times 2 + 4 \times 4 + \dots + 4 \times (n-1)}_{\text{共 } \frac{n-1}{2} \text{ 项}} = 3 + 4 \times \frac{\frac{n-1}{2} (2 + n-1)}{2} = n^2 + 2$$
11分

综上, $S_n = \begin{cases} n^2, & n \text{ 为偶数} \\ n^2 + 2, & n \text{ 为奇数} \end{cases}$ 12 分

18. 解: (I) ① 40 人中符合“*A*类”的调查对象共有 16 人, 其中男性 12 人, 女性 4 人, 3 分
从中抽取 2 人, 则抽到性别不同的概率为 $P(A) = \frac{C_{12}^1 C_4^1}{C_{16}^2} = \frac{2}{5}$

② X 可能的取值为 1, 3, 其中 $X=1$ 表示抽到 2 男 1 女或者 2 女 1 男, 2 分
则 $P(X=1) = \frac{C_{12}^2 C_4^1 + C_{12}^1 C_4^2}{C_{16}^3} = \frac{3}{5}$, $P(X=3) = 1 - P(X=1) = \frac{2}{5}$
(注: 也可同理直接计算 $P(X=3) = \frac{C_{12}^3 + C_4^3}{C_{16}^3} = \frac{2}{5}$)

故 X 的分布列为

X	1	3
P	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$

其期望 $E(X) = 1 \times \frac{3}{5} + 3 \times \frac{2}{5} = \frac{9}{5}$ 8 分

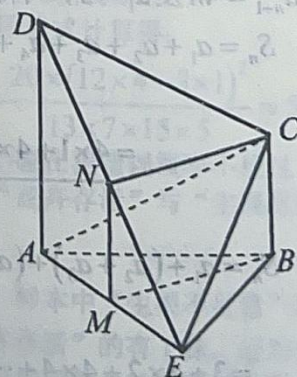
(II) 由茎叶图可知, 对应的 2×2 列联表如下:

	“非 <i>A</i> 类”调查对象人数	“ <i>A</i> 类”调查对象人数	总计
男	8	12	20
女	16	5	20
总计	24	16	40

由公式计算可得 $K^2 = \frac{40 \times (8 \times 4 - 12 \times 16)^2}{24 \times 16 \times 20 \times 20} \approx 6.667 > 6.635$, 10 分
..... 11 分

故能够在犯错误的概率不超过 1% 的前提下, 认为调查对象是“*A*类”与性别有关. 12 分

19. 解: (I) 如图, 取 AE 、 DE 的中点 M 、 N ,
连接 BM 、 MN 、 CN , 则知 $MN \parallel AD$, 且 $AD = 2MN$,
又 $AD \parallel BC$, 且 $AD = 2BC$,
所以 $MN \parallel BC$, 且 $MN = BC$,
则四边形 $BMNC$ 为平行四边形, 所以 $CN \parallel BM$.
 $\because AB = BE$, M 为 AE 的中点, $\therefore BM \perp AE$,
 $\because AD \perp$ 平面 ABE , $BM \subset$ 平面 ABE , $\therefore BM \perp AD$,
又 $AD \cap AE = A$, $\therefore BM \perp$ 平面 DAE
从而可得 $CN \perp$ 平面 DAE , 由于 $CN \subset$ 平面 DCE ,
所以平面 $DCE \perp$ 平面 DAE , 命题得证. 5 分



(II) 由 $AB=BE=1$ 且 $AE=\sqrt{2}$, 得 $AB \perp BE$,
 又已知 $AD \perp$ 平面 ABE , $AD \parallel BC$, 则有 $BC \perp$ 平面 ABE ,
 故可如图建立空间直角坐标系 $B-xyz$, 7 分

设 $BC=t(t>0)$, 则有 $B(0,0,0)$, $C(0,0,t)$, $E(0,1,0)$, $D(1,0,2t)$,
 所以 $\overrightarrow{EC}=(0,-1,t)$, $\overrightarrow{CD}=(1,0,t)$, 记平面 DCE 的一个法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$, 则有

$$\begin{cases} \overrightarrow{EC} \cdot \vec{n} = 0 \\ \overrightarrow{ED} \cdot \vec{n} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -y+tz=0 \\ x+tz=0 \end{cases}, \text{不妨取 } z=1, \text{ 可得 } \vec{n}=(-t,1,1)$$

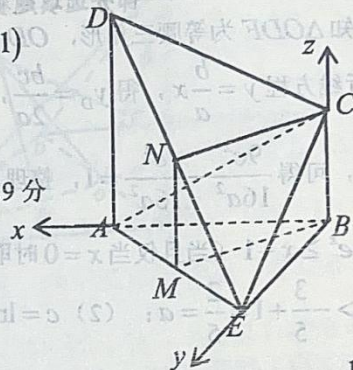
而平面 BCE 的一个法向量为 $\vec{m}=(1,0,0)$,

$$\text{则有 } \cos \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle = \frac{\vec{m} \cdot \vec{n}}{|\vec{m}| |\vec{n}|} = \frac{-t}{\sqrt{2t^2+1}}, \text{ 9 分}$$

由已知, 则有 $|\cos \alpha| = |\cos \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle| = \frac{\sqrt{6}}{6}$,

$$\text{即得 } \frac{t}{\sqrt{2t^2+1}} = \frac{\sqrt{6}}{6} (t>0), \text{ 解之可得 } t = \frac{1}{2}$$

从而可得 $AD=2BC=2t=1$ 为所求. 12 分



20. 解: (I) 由 AC 经过 E 椭圆的右焦点 $F(1,0)$, 设直线 AC 的方程为 $x=ty+1$,

$$\text{联立方程组 } \begin{cases} x=ty+1 \\ 3x^2+4y^2=12 \end{cases}, \text{ 消去 } x \text{ 整理可得 } (3t^2+4)y^2+6ty-9=0,$$

显然 $\Delta > 0$, 且有 $y_1+y_2 = \frac{-6t}{3t^2+4}$, $y_1y_2 = \frac{-9}{3t^2+4}$ 3 分

$$\text{法一: 则知 } |AC| = \sqrt{(1+t^2)[(y_1+y_2)^2-4y_1y_2]} = \dots = \frac{12(t^2+1)}{3t^2+4},$$

(说明: 此处也可借助椭圆的右焦点半径公式 $r=a-ex_0$, 得到 $|AC|=2a-e(x_1+x_2)$ 求之)

而原点 O 到直线 AC 的距离 $d = \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}$,

由于 O 为线段 AB 的中点, 则 B 到直线 AC 的距离为 $2d$,

$$\text{则 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |AC| \cdot 2d = |AC| \cdot d = \frac{12\sqrt{t^2+1}}{3t^2+4} = \frac{12}{3\sqrt{t^2+1} + \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}} = \frac{12}{3m + \frac{1}{m}}, \text{ 其中 } m = \sqrt{t^2+1} \geq 1,$$

由 $y = 3m + \frac{1}{m}$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递增, 故 $y = 3m + \frac{1}{m} \geq 4$,

当 $m = \sqrt{t^2+1} = 1$, 即 $t=0$ 时, 等号成立, 从而可知, $S_{\triangle ABC}$ 的最大值为 3. 8 分

法二: 注意到 O 为线段 AB 的中点, 则 $S_{\triangle ABC} = 2S_{\triangle AOC} = |OF| \cdot |y_2 - y_1| = \sqrt{(y_1+y_2)^2 - 4y_1y_2}$,

$$\text{则有 } S_{\triangle ABC} = \sqrt{\left(\frac{-6t}{3t^2+4}\right)^2 - 4 \times \frac{-9}{3t^2+4}} = \frac{12(t^2+1)}{3t^2+4}, \text{ 以下同法一. 8 分}$$

(1) 当 $a=0$ 时, 可知 $g'(x) = \frac{1-x}{x^2} \leq 0$, 则 $g(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递减,

从而有 $g(x) < g(1) = 0$, 不合题意. 4分

(2) 当 $a \neq 0$ 时, 可进一步得到 $g'(x) = \frac{a(x-1)\left(x - \frac{1-a}{a}\right)}{x^2}$

① 若 $\frac{1-a}{a} \leq 1$, 解得 $a \geq \frac{1}{2}$ 或 $a < 0$,

1° 当 $a \geq \frac{1}{2}$ 时, 可知 $g'(x) \geq 0$, 则 $g(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递增,

从而有 $g(x) \geq g(1) = 0$, 即有 $f(x) - \ln x \geq 0$ 恒成立, 符合题意; 7分

2° 当 $a < 0$ 时, 可知 $g'(x) \leq 0$, 则 $g(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递减, 则同理可知其不合题意;

② 当 $\frac{1-a}{a} > 1$, 解得 $0 < a < \frac{1}{2}$ 时, 可知 $g'(x) < 0 \Leftrightarrow 1 < x < \frac{1-a}{a}$,

则 $g(x)$ 在 $\left(1, \frac{1-a}{a}\right)$ 上单调递减, 从而有 $g(x) < g(1) = 0$, 不合题意.

综上, a 的取值范围是 $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$ 8分

(III) 由 (II) 可知, 当 $a \geq \frac{1}{2}$ 时, 有 $f(x) \geq \ln x (x \geq 1)$,

令 $a = \frac{1}{2}$, 则有 $f(x) = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right) \geq \ln x (x \geq 1)$, 且 $x > 1$ 时, $\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right) > \ln x$

设 $x = \frac{k+1}{k} (k \in \mathbb{N}_+)$, 则有 $\ln \frac{k+1}{k} < \frac{1}{2}\left(\frac{k+1}{k} - \frac{k}{k+1}\right) = \frac{1}{2}\left[\left(1 + \frac{1}{k}\right) - \left(1 - \frac{1}{k+1}\right)\right]$

从而可得 $\ln(k+1) - \ln k < \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1}\right), k = 1, 2, 3, \dots, n$

将上述 n 个不等式依次相加可得

$$\ln(n+1) - \ln 1 < \frac{1}{2}\left[\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right)\right]$$

$$\text{即 } \ln(n+1) < \frac{1}{2}\left[1 + 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n+1}\right] = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{2(n+1)}$$

从而可得 $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{2(n+1)} > \ln(n+1) (n \in \mathbb{N}_+)$ 成立. 12分

22. 解: (I) 由题可得 $\rho^2 = \frac{2}{1+\sin^2 \theta}$, 即有 $\rho^2 + \rho^2 \sin^2 \theta = 2$,

结合转换公式 $\rho^2 = x^2 + y^2$, $\rho \sin \theta = y$, 代入整理 $x^2 + 2y^2 = 2$,

经检验, 曲线 C 的直角坐标方程为 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 5 分

(II) 由已知易得, 直线 l 经过定点 $(-1, 0)$, 且其倾斜角为 $\frac{\pi}{4}$,

由此其参数方程也可写为 $\begin{cases} x = -1 + \frac{\sqrt{2}}{2}t \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}t \end{cases}$ (t 为参数) (也称之为该直线的标准参数方程),

将其代入 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$, 整理可得 $3t^2 - 2\sqrt{2}t - 2 = 0$, 显然其 $\Delta > 0$,

设 M 、 N 两点对应的参数分别为 t_1 、 t_2 , 则有 $t_1 + t_2 = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, $t_1 t_2 = -\frac{2}{3}$,

所以 $|MN| = |t_1 - t_2| = \sqrt{(t_1 + t_2)^2 - 4t_1 t_2} = \frac{4\sqrt{2}}{3}$ 10 分

(说明: 显然, 此问也可直接解出参数值求之, 或者用直线的普通方程与曲线 C 联立求解之.)

23. 解: (I) 法一: 由题得 $f(x) = \begin{cases} -1, x \leq 1 \\ 2x-3, 1 < x < 2 \\ 1, x \geq 2 \end{cases}$,

其中, 当 $1 < x < 2$ 时, $f(x) \in (-1, 1)$, 从而易得函数 $f(x)$ 的值域为 $[-1, 1]$ 5 分

法二: 由绝对值不等式的性质可得, $|f(x)| = ||x-1| - |x-2|| \leq |(x-1) - (x-2)| = 1$,

所以 $-1 \leq f(x) \leq 1$, 当且仅当 $(x-1)(x-2) \geq 0$, 即 $x \leq 1$ 或 $x \geq 2$ 时取得等号,

故函数 $f(x)$ 的值域为 $[-1, 1]$ 5 分

(II) 法一: 由基本不等式, 得 $\frac{1}{2a^2} + \frac{1}{2b^2} = \left(\frac{1}{2a^2} + \frac{1}{2b^2}\right)(a^2 + b^2) = 1 + \frac{b^2}{2a^2} + \frac{a^2}{2b^2} \geq 2$,

当且仅当 $a = b = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时取得等号, 故 $\frac{1}{2a^2} + \frac{1}{2b^2}$ 的最小值为 2. 7 分

法二: 由柯西不等式, 得 $\frac{1}{2a^2} + \frac{1}{2b^2} = \left(\frac{1}{2a^2} + \frac{1}{2b^2}\right)(a^2 + b^2) \geq \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 2$,

当且仅当 $a = b = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时取得等号, 故 $\frac{1}{2a^2} + \frac{1}{2b^2}$ 的最小值为 2. 7 分

由题得, $4f(x) \leq 2$, 即 $|x-1| - |x-2| \leq \frac{1}{2}$, 结合 (I) 之法一 (零点分段, 讨论求解)

等价于 $\begin{cases} x \leq 1 \\ -1 \leq \frac{1}{2} \end{cases}$ 或 $\begin{cases} 1 < x < 2 \\ 2x-3 \leq \frac{1}{2} \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x \geq 2 \\ 1 \leq \frac{1}{2} \end{cases}$, 由此可解得 $x \leq \frac{7}{4}$,

故原不等式的解集为 $\left(-\infty, \frac{7}{4}\right]$.

10分