

树德中学高 2020 级高三下期 2 月开学考试数学试题 (文科)

命题人:

考试时间: 120 分钟

全卷满分: 150 分

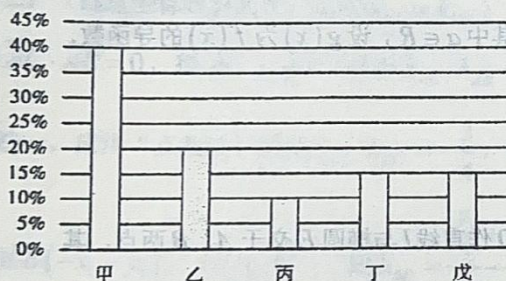
一、选择题 (共 12 小题, 每小题 5 分, 满分 60 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。)

1. 设集合 $A = \{1, 2, x\}$, $B = \{2, x^2\}$, 且 $A \cup B = A$, 则 $x =$ ()
 A. -1 B. 1 C. -1 或 0 D. -1 或 0 或 1

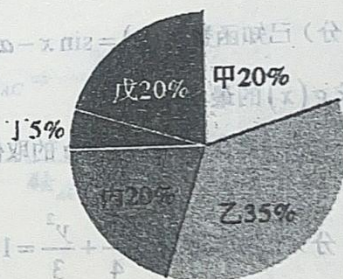
2. 设复数 $z = \frac{1+i}{7+4i}$, 其在复平面内的对应的点记为 Z , 则 ()
 A. z 的虚部为 $-\frac{3}{65}i$ B. $\bar{z} = \frac{11}{65} - \frac{3}{65}i$ C. Z 在第四象限 D. $|z| = \frac{8}{65}$

3. 某国有企业响应国家关于进一步深化改革, 加强内循环的号召, 不断自主创新提升产业技术水平, 同时积极调整企业旗下的甲、乙、丙、丁、戊等 5 种产品的结构比例, 近年来取得了显著效果。据悉该企业 2022 年 5 种系列产品年总收入是 2021 年的 2 倍, 其中 5 种系列产品的年收入构成比例如下图所示。则以下说法错误的是 ()

2021 年收入构成比例



2022 年收入构成比例



- A. 2022 年甲系列产品收入和 2021 年的一样多
 B. 2022 年乙和丙系列产品收入之和比 2021 年的企业总收入还多
 C. 2022 年丁系列产品收入是 2021 年丁系列产品收入的 $\frac{1}{3}$
 D. 2022 年戊系列产品收入是 2021 年戊系列产品收入的 2 倍还多

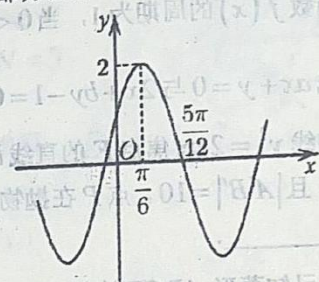
4. “攒尖”是中国古代建筑中屋顶的一种结构形式, 依据其不同的形状特征分为圆形攒尖、三角攒尖、四角攒尖、六角攒尖等, 多见于亭阁式建筑。如图所示, 某园林中的一种亭阁式建筑为六角攒尖, 它的主要部分的轮廓可以近似看作为一个正六棱锥。设此正六棱锥的侧面等腰三角形的顶角为 2θ , 则该正六棱锥的侧棱长 a 与其底面内切圆半径 r 的比为 ()



- A. $\frac{\sqrt{3}}{3\sin\theta}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{3\cos\theta}$ C. $\frac{1}{2\sin\theta}$ D. $\frac{1}{2\cos\theta}$
5. 已知 $\vec{a} = (1, 2)$, $\vec{b} = (-1, 3)$, 则 $\vec{a} - \vec{b}$ 在 $\vec{a} + \vec{b}$ 方向上的投影所对应向量的坐标为 ()
 A. (0, 1) B. (-1, 0) C. (0, -1) D. (0, 1)

6. 若 $\theta \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$, 且 $\cos^2 \theta + \cos\left(2\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{2}$, 则 $\tan \theta =$ ()
 A. $\sqrt{3}$ B. 2 C. 3 D. $2\sqrt{3}$

7. 已知函数 $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi)$ ($x \in \mathbb{R}, A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的部分图象如图所示, 则下列说法正确的是 ()



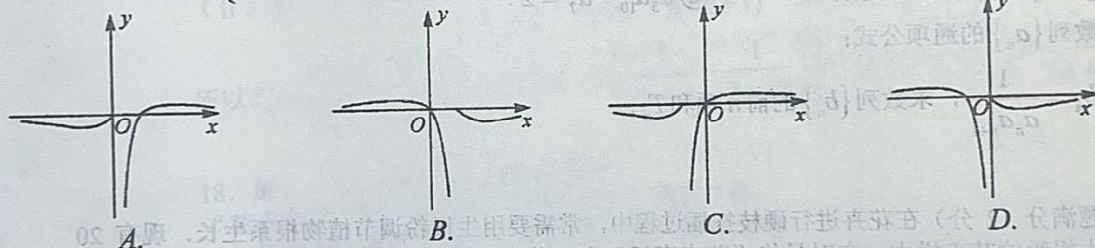
- A. 直线 $x = \pi$ 是函数 $y = f(x)$ 的图象的一条对称轴
 B. 函数 $y = f(x)$ 的图象的对称中心坐标为 $(k\pi - \frac{\pi}{12}, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$
 C. 函数 $y = f(x)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}]$ 上单调递增
 D. 将函数 $y = f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度后, 可得到一个奇函数的图象

8. $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 满足 $(\sin B - \sin C)^2 = \sin^2 A - \sin B \sin C$.

若 $\triangle ABC$ 为锐角三角形, 且 $a = 3$, 则当 $\triangle ABC$ 面积最大时, 其内切圆面积为 ()

- A. 9π B. 3π C. $\frac{9}{4}\pi$ D. $\frac{3}{4}\pi$

9. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln x}{x}, & x > 0 \\ xe^x, & x \leq 0 \end{cases}$, 则函数 $y = f(1-x)$ 的图象大致是 ()



10. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的右焦点为 F , 两条渐近线分别为 l_1, l_2 , 过 F 且与 l_1 平行的直线与双曲线 C 及直线 l_2 依次交于点 B, D , 点 B 恰好平分线段 FD , 则双曲线 C 的离心率为 ()

- A. $\frac{4}{3}$ B. $\sqrt{2}$ C. $\sqrt{3}$ D. 2

11. 已知 $a = \frac{2}{5}$, $b = e^{\frac{3}{5}}$, $c = \ln 5 - \ln 4$, 则 a, b, c 的大小关系为 ()

- A. $a > b > c$ B. $a > c > b$ C. $b > a > c$ D. $b > c > a$

12. 已知函数 $f(x) = x^4 - x^2 + x - 1$, 则下列四个说法中正确的个数为 ()

- ① 曲线 $y = f(x)$ 上存在三条互相平行的切线; ② 函数 $y = f(x)$ 有唯一极值点;
 ③ 函数 $y = f(x)$ 有两个零点; ④ 过坐标原点 O 可作曲线 $y = f(x)$ 的切线.

- A. 4 B. 3 C. 2 D. 1

二、填空题：（共4小题，每小题5分，满分20分。）

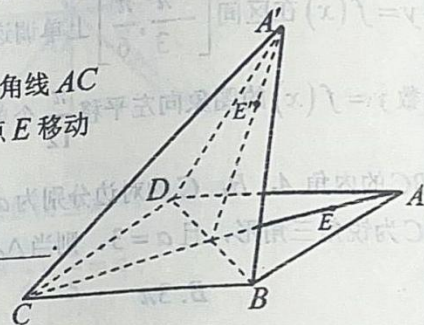
13. 已知函数 $f(x)$ 的周期为1，当 $0 < x \leq 1$ 时， $f(x) = -\ln x$ ，则 $f\left(-\frac{1}{2}\right)$ 的值为_____。

14. 若直线 $ax + y = 0$ 与 $2x + by - 1 = 0$ 平行，其中 a, b 均为正数，则 $a + 2b$ 的最小值为_____。

15. 过抛物线 $y^2 = 2px$ 焦点 F 的直线 l 与抛物线交于 A, B ，点 A, B 在抛物线准线上的射影分别为 A', B' ，且 $|A'B'| = 10$ ，点 P 在抛物线的准线上。若 AP 是 $\angle A'AF$ 的角平分线，则点 P 到直线 l 的距离为_____。

16. 如图，已知菱形 $ABCD$ 边长为6， $\angle ADC = 120^\circ$ ， E 为对角线 AC 上一点， $AE = \sqrt{3}$ 。将 $\triangle ABD$ 沿 BD 翻折到 $\triangle A'BD$ 的位置，点 E 移动到点 E' ，且二面角 $A'-BD-A$ 的大小为 60° 。

- (1) 三棱锥 $A'-BCD$ 的外接球的半径为_____；
(2) 过 E' 作平面与该外接球相交，所得截面面积的最小值为_____。
(第一空2分，第二空3分)



三、解答题（共6题，满分70分。）

17. (本题满分12分) 已知公差为正数的等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ， $a_1 = 1$ ，
请从以下两个条件中任选一个，补充在题干的横线上，并解答下列问题：

- ① S_2, S_4, S_8 成等比数列； ② $a_5 a_{10} - a_7^2 = 2$ 。

(I) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(II) 若 $b_n = \frac{1}{a_n a_{n+1}}$ ，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n 。

18. (本题满分12分) 在花卉进行硬枝扦插过程中，常需要用生根粉调节植物根系生长。现有20株使用了生根粉的花卉样本，在对最终“花卉存活”和“花卉死亡”进行统计的同时，也对使用生根粉2个小时后的生根量进行了统计。这20株花卉生根量如下表所示，其中生根量在6根以下的视为“生根不足量”，大于或等于6根则视为“生根足量”。在这20株花卉样本中，“花卉存活”的有13株，而“花卉存活”但“生根不足量”的植株共1株。

编号	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12	13	14	15	16	17	18	18	20
生根量	6	8	3	8	9	5	6	6	2	7	7	5	9	6	7	8	8	4	6	9

(I) 完成下面的 2×2 列联表，并判断是否能在犯错误概率不超过1%的前提下，认为“花卉存活”与“生根足量”有关？（参考公式与数据，见19题上方）

	生根足量	生根不足量	总计
花卉存活			
花卉死亡			
总计			20

(II) 若在该样本“生根不足量”的植株中随机抽取3株进行进一步检测，求这3株中恰有1株“花卉存活”的概率。

18 题参考公式与数据——

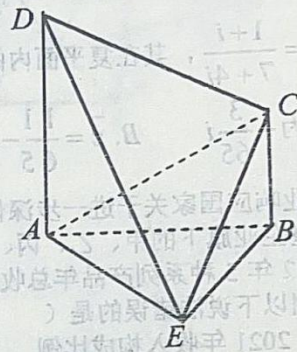
$$K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(a+c)(b+d)(c+d)}, \quad n=a+b+c+d$$

$P(K^2 \geq k_0)$	0.15	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
k_0	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

19. (本题满分 12 分) 如图, 在几何体 $ABCDE$ 中,
 $AD \perp$ 面 ABE , $AD \parallel BC$, $AD = 2BC$, $AB = BE$.

(I) 求证: 平面 $DCE \perp$ 平面 DAE ;

(II) 若 $AB=1$, $AE=\sqrt{2}$, $V_{ABCDE} = \frac{1}{4}$, 求 CE 与平面 DAE 所成角的正弦值.



20. (本题满分 12 分) 已知函数 $f(x) = \sin x - ax + \frac{1}{6}x^3$, 其中 $a \in \mathbb{R}$, 设 $g(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数.

(I) 若 $a=1$, 求 $g(x)$ 的最小值;

(II) 若 $x \geq 0$ 时, $f(x) \geq 0$ 恒成立, 求 a 的取值范围.

21. (本题满分 12 分) 已知椭圆 $E: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$, 过原点 O 作直线 l 与椭圆 E 交于 A, B 两点, 其中 $A(x_1, y_1)$ 位于第一象限, $C(x_2, y_2)$ 为椭圆 E 上异于 A, B 的一点.

(I) 若 AC 经过椭圆 E 的右焦点 F , 试求 $S_{\triangle ABC}$ 的最大值.

(II) 若 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$, 记点 $D\left(x_1, \frac{y_1}{2}\right)$, 试问: B, C, D 三点是否共线? 请给出判断并说明理由.

(选考题). 请在第 22、23 题中任选一题作答. 如果多做, 则按所做的第一题计分.

22. (本题满分 10 分) 在平面直角坐标系 xOy 中, 直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x = -1+t \\ y = t \end{cases}$ (t 为参数),

以坐标原点 O 为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线 C 的极坐标方程为 $\rho = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+\sin^2 \theta}}$.

(I) 求曲线 C 的直角坐标方程;

(II) 若直线 l 与曲线 C 交于 M, N 两点, 求线段 MN 的长.

23. (本题满分 10 分) 已知函数 $f(x) = |x-1| - |x-2|$, $g(x) = |2x-1|$.

(I) 求函数 $f(x)$ 的值域;

(II) 若 $a > 0$, $b > 0$, 且 $a^2 + b^2 = 1$, 不等式 $4f(x) \leq \frac{1}{2a^2} + \frac{1}{2b^2}$ 恒成立, 求实数 x 的取值范围.

树德中学高 2020 级高三下期 2 月开学考试数学试题 (文科) 参考答案

一、选择题: CBCAC CCDBB CB

二、填空题: 13. $\ln 2$ 14. 4 15. 5 16. (1) $\sqrt{21}$ (2) 9π

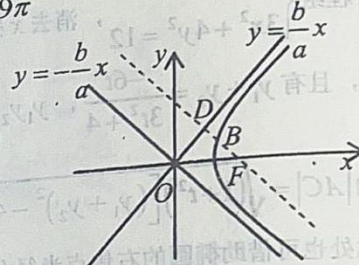
——部分选填题参考解答——

10. 如图, 由题意可知 $\triangle ODF$ 为等腰三角形, $OD = DF$,

则 $x_D = \frac{c}{2}$, 代入渐近线方程 $y = \frac{b}{a}x$, 得 $y_D = \frac{bc}{2a}$,

又 $F(c, 0)$, 可得中点 $B\left(\frac{3c}{4}, \frac{bc}{4a}\right)$, 将其代入双曲线方程,

可得 $\frac{9c^2}{16a^2} - \frac{c^2}{16a^2} = 1$, 整理可得 $e^2 = 2$, $\therefore e = \sqrt{2}$.



11. 联系函数不等式 $e^x \geq x+1$ (当且仅当 $x=0$ 时取等) 和 $\ln x \leq x-1$ (当且仅当 $x=1$ 时取等),

可得: (1) $b = e^{\frac{3}{5}} > -\frac{3}{5} + 1 = \frac{2}{5} = a$; (2) $c = \ln 5 - \ln 4 = \ln \frac{5}{4} < \frac{5}{4} - 1 = \frac{1}{4} < \frac{2}{5} = a$.

从而有 $b > a > c$.

12. $f(x) = x^4 - x^2 + x - 1$, $f'(x) = 4x^3 - 2x + 1$, $f''(x) = 12x^2 - 2 = 12\left(x + \frac{\sqrt{6}}{6}\right)\left(x - \frac{\sqrt{6}}{6}\right)$,

(1) $f'(x)$ 在 $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$ 上 $\nearrow$, 在 $\left(-\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}\right)$ 上 $\searrow$, 在 $\left(\frac{\sqrt{6}}{6}, +\infty\right)$ 上 $\nearrow$,

则 $f'(x)$ 大致图象如右所示, 可知方程 $f'(x) = k$ 可能有两个根, 故①正确

(2) 计算得 $f'\left(\frac{\sqrt{6}}{6}\right) > 0$, 则存在 $x_0 \in \left(-\infty, -\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$, 使得 $f'(x_0) = 0$,

从而可知 $f(x)$ 在 $(-\infty, x_0)$ 上 $\searrow$, $(x_0, +\infty)$ 上 $\nearrow$, 故②正确

(3) 计算得 $f\left(-\frac{\sqrt{6}}{6}\right) < 0$, 则 $f(x_0) < 0$, $f(x)$ 大致图象如右, 故③正确

(4) 设过原点 O 的直线 $y = kx$ 与 $y = f(x)$ 相切于点 (x_0, y_0) , 则有

$y_0 = x_0^4 - x_0^2 + x_0 - 1$, $k = f'(x_0) = 4x_0^3 - 2x_0 + 1$, $y_0 = kx_0$,

消元整理可得 $3x_0^4 - x_0^2 + 1 = 0$, 易知此方程无解, 故④错误. 综上, 正确的是①②③.

(说明: 由 $f(x) = x^4 - x^2 + x - 1 = (x-1)(x^3 + x^2 + 1)$, 也可以分析 $f(x)$ 的零点个数)

15. (请同学们结合此题的学习与研究, 进一步丰富对抛物线焦点弦的典型性质的认识与积累!)

【解法简介】过 F 作 AB 的垂线, 交准线于 M , 连接 MA , 由 $AA' = AF$, 易证 MA 平分 $\angle A'AF$, 则知 M 即已知中的点 P . 连接 PB , 已知 PB 平分 $\angle B'BF$, 可推知 $PA' = PF = PB'$, 则 P 恰为 $A'B'$ 的中点, 故 $PF = PA' = PB' = 5$.

【性质积累】(1) 可以证明, 以焦点弦 AB 为直径的圆必与准线相切, 且切点恰为 $A'B'$ 的中点 P ;

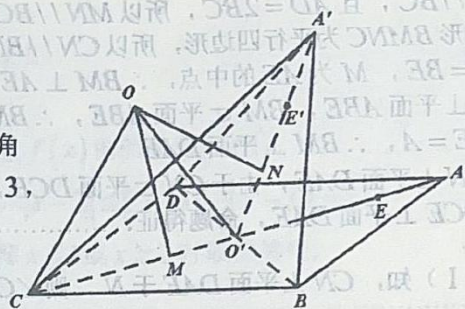
(2) 连接 PF , 可以证明 PF 恰好与此焦点弦 AB 相互垂直;

(3) 连接 PA 、 PB , 可以证明 PA 平分 $\angle A'AF$, PB 平分 $\angle B'BF$. (图略)

16. (1) 由题易知, $\triangle CBD$ 、 $\triangle A'B'D$ 均为等边三角形, 取它们的中心 M 、 N , 过 M 、 N 分别作平面 CBD 、平面 $A'B'D$ 的垂线, 易知两垂线必交于一点 O , 且点 O 正是三棱锥 $A'-BCD$ 的外接球球心. (如图所示)

记 $AC \cap BD = O'$, 则可知二面角 $A'-BD-A$ 的平面角为 $\angle A'OC = 120^\circ$, 在四边形 $MO'NO$ 中, 可求得 $ON = 3$, 则外接球半径 $R = \sqrt{ON^2 + NA'^2} = \sqrt{21}$;

(2) 当截面面积取最小值时, 可知 $OE' \perp$ 截面, 易求得 $|OE'| = 2\sqrt{3}$, 则截面圆半径 $r = \sqrt{R^2 - OE'^2} = 3$, 故其面积 $S = 9\pi$.



三、解答题: 全科试题免费下载公众号《高中僧课堂》

17. 解: (I) 选择①, 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 则 $d > 0$,

由题意可得 $S_4^2 = S_2 S_8$, 即有 $(4+6d)^2 = (2+d)(8+28d)$, 解之得 $d = 2$,

则 $a_n = 1 + 2(n-1) = 2n-1$6分

选择②, 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 则 $d > 0$,

由可 $a_3 a_{10} - a_7^2 = 2$, 得 $(1+4d)(1+9d) - (1+6d)^2 = 2$, 解之得 $d = 2$,

则 $a_n = 1 + 2(n-1) = 2n-1$6分

(II) 由 (I) 可得 $b_n = \frac{1}{a_n a_{n+1}} = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right)$

所以 $T_n = \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \right] = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{n}{2n+1}$ 12分

18. 解: (I) 由题意及数据表可得,

“花卉存活”的有 13 株, “花卉死亡”的有 7 株;

“生根足量”的有 15 株, “生根不足量”的有 5 株.

①填写列联表如右:

②应用公式计算得:

$$K^2 = \frac{20 \times (12 \times 4 - 3 \times 1)^2}{13 \times 7 \times 15 \times 5} \approx 5.934 < 6.635$$

所以不能在犯错误概率不超过 1% 的前提下, 认为“花卉存活”与“生根足量”有关.

	生根足量	生根不足量	总计
花卉存活	12	1	13
花卉死亡	3	4	7
总计	15	5	20

(II) 样本中“生根不足量”的有 5 株, 其中“花卉死亡”的有 4 株, 记为 A, B, C, D ;

“花卉存活”的有 1 株, 记为 a . 设事件 A : 从 5 株中随机抽取 3 株中恰有 1 株存活,

可知其包含的所有情况为: $ABC, ABD, ACD, BCD; ABa, ACa, ADa, BCa, BDa, Ca$. 共 10 种
其中恰有 1 株“花卉存活”的情况为 $ABa, ACa, ADa, BCa, BDa, CDa$. 共 6 种.

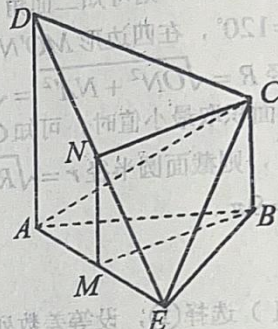
故所求事件的概率为 $P(A) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$12分

19. 解: (I) 如图, 取 AE 、 DE 的中点 M 、 N , 连接 BM 、 MN 、 CN , 则知 $MN \parallel AD$, 且 $AD = 2MN$,

又 $AD \parallel BC$, 且 $AD = 2BC$, 所以 $MN \parallel BC$, 且 $MN = BC$,
则四边形 $BMNC$ 为平行四边形, 所以 $CN \parallel BM$.

$\because AB = BE$, M 为 AE 的中点, $\therefore BM \perp AE$,
 $\because AD \perp$ 平面 ABE , $BM \subset$ 平面 ABE , $\therefore BM \perp AD$,
又 $AD \cap AE = A$, $\therefore BM \perp$ 平面 DAE

从而可得 $CN \perp$ 平面 DAE , 由于 $CN \subset$ 平面 DCE ,
所以平面 $DCE \perp$ 平面 DAE , 命题得证.6分



(II) 由 (I) 知, $CN \perp$ 平面 DAE 于 N , 则 $\angle CEN$ 为 CE 与平面 DAE 所成角. 且在 $Rt\triangle CEN$ 中, $\sin \angle CEN = \frac{CN}{CE}$,8分

由 $AB = BE = 1$ 且 $AE = \sqrt{2}$, 得 $AB \perp BE$,
又已知 $AD \perp$ 平面 ABE , $BE \subset$ 平面 ABE , $\therefore AD \perp BE$,
 $\because AD \cap AB = A$, $\therefore BE \perp$ 平面 $ABCD$

设 $BC = t (t > 0)$, 则 $AD = 2t$, 那么有 $S_{ABCD} = \frac{AD + BC}{2} \cdot AB = \frac{3t}{2}$,

则 $V_{ABCDE} = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot BE = \frac{t}{2} = \frac{1}{4}$, 解得 $t = \frac{1}{2}$, 即有 $BC = \frac{1}{2}$,10分

从而易得, 在 $Rt\triangle CBE$ 中, $CE = \frac{\sqrt{5}}{2}$;

又在 $Rt\triangle ABE$ 中, $BM = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 则知 $CN = BM = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

$\therefore \sin \angle CEN = \frac{CN}{CE} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{10}}{5}$, 即 CE 与平面 DAE 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{10}}{5}$;12分

20. 解: (I) $a = 1$ 时, 由 $f(x) = \sin x - x + \frac{1}{6}x^3$, 可得 $g(x) = f'(x) = \cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2$,

则 $g'(x) = -\sin x + x$, 那么有 $g''(x) = -\cos x + 1 \geq 0$, 所以 $g'(x)$ 在定义域 R 上单调递增,

注意到 $g'(0) = 0$, 从而可得 $g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$, $g'(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 0$,

即知 $g(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增,

故 $g(x) \geq g(0) = 0$, 即当 $a = 1$ 时, $g(x)$ 的最小值为 0.6分

(II) 由 $f(x) = \sin x - ax + \frac{1}{6}x^3$, 可得 $g(x) = f'(x) = \cos x - a + \frac{1}{2}x^2$,

由 (I), 同理可知, $g(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增, 则 $g(x) \geq g(0) = 1 - a$. 讨论如下:

(1) 当 $a \leq 1$ 时, 有 $g(x) \geq g(0) = 1 - a \geq 0$, 则 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增,

从而有 $f(x) \geq f(0) = 0$, 符合题意.

(2) 当 $a > 1$ 时, 有 $g(0) = 1 - a < 0$, 由于 $g(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增,

且 $g(2a) = \cos 2a - a + 2a^2 = \cos 2a + a^2 + a(a - 1) > 0$, 所以 $\exists x_0 \in (0, 2a)$, 使得 $g(x_0) = 0$.

从而可知当 $x \in (0, x_0)$ 时, $g(x) < g(x_0) = 0$, 则 $f(x)$ 在 $(0, x_0)$ 上单调递减,

此时有 $f(x) < f(0) = 0$, 不合题意.

综上, a 的取值范围为 $(-\infty, 1]$12 分

21. 解: (I) 由 AC 经过 E 椭圆的右焦点 $F(1, 0)$, 设直线 AC 的方程为 $x = ty + 1$,

$$\text{联立方程组} \begin{cases} x = ty + 1 \\ 3x^2 + 4y^2 = 12 \end{cases}, \text{ 消去 } x \text{ 整理可得 } (3t^2 + 4)y^2 + 6ty - 9 = 0,$$

$$\text{显然 } \Delta > 0, \text{ 且有 } y_1 + y_2 = \frac{-6t}{3t^2 + 4}, y_1 y_2 = \frac{-9}{3t^2 + 4}. \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$\text{法一: 则知 } |AC| = \sqrt{(1+t^2)[(y_1+y_2)^2 - 4y_1 y_2]} = \dots = \frac{12(t^2+1)}{3t^2+4},$$

(说明: 此处也可借助椭圆的右焦点半径公式 $r = a - ex_0$, 得到 $|AC| = 2a - e(x_1 + x_2)$ 求之)

$$\text{而原点 } O \text{ 到直线 } AC \text{ 的距离 } d = \frac{1}{\sqrt{t^2+1}},$$

由于 O 为线段 AB 的中点, 则 B 到直线 AC 的距离为 $2d$,

$$\text{则 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}|AC| \cdot 2d = |AC| \cdot d = \frac{12\sqrt{t^2+1}}{3t^2+4} = \frac{12}{3\sqrt{t^2+1} + \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}} = \frac{12}{3m + \frac{1}{m}}, \text{ 其中 } m = \sqrt{t^2+1} \geq 1,$$

$$\text{由 } y = 3m + \frac{1}{m} \text{ 在 } [1, +\infty) \text{ 上单调递增, 故 } y = 3m + \frac{1}{m} \geq 4,$$

$$\text{当 } m = \sqrt{t^2+1} = 1, \text{ 即 } t = 0 \text{ 时, 等号成立, 从而可知, } S_{\triangle ABC} \text{ 的最大值为 } 3. \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\text{法二: 注意到 } O \text{ 为线段 } AB \text{ 的中点, 则 } S_{\triangle ABC} = 2S_{\triangle AOC} = |OF| \cdot |y_2 - y_1| = \sqrt{(y_1+y_2)^2 - 4y_1 y_2},$$

$$\text{则有 } S_{\triangle ABC} = \sqrt{\left(\frac{-6t}{3t^2+4}\right)^2 - 4 \times \frac{-9}{3t^2+4}} = \frac{12(t^2+1)}{3t^2+4}, \text{ 以下同法一. } \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

(II) B, C, D 三点共线, 证明如下:

法一: (证明点 D 在直线 BC 上, 即证点 D 的坐标适合直线 BC 的方程)

$$\text{一方面, 由 } \begin{cases} 3x_1^2 + 4y_1^2 = 12 \\ 3x_2^2 + 4y_2^2 = 12 \end{cases}, \text{ 两式相减整理可得 } 4(y_2^2 - y_1^2) = -3(x_2^2 - x_1^2),$$

$$\text{另一方面, } k_{AC} \cdot k_{BC} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot \frac{y_2 + y_1}{x_2 + x_1} = \frac{y_2^2 - y_1^2}{x_2^2 - x_1^2}, \text{ 从而可得 } k_{AC} \cdot k_{BC} = -\frac{3}{4} \text{ 为定值. } \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\text{由 } \overline{AC} \cdot \overline{AB} = 0, \text{ 得 } AC \perp AB, \text{ 即有 } k_{AC} \cdot k_{AB} = -1, \text{ 又 } k_{AC} \cdot k_{BC} = -\frac{3}{4},$$

$$\text{可得 } k_{BC} = \frac{3}{4} k_{AB} = \frac{3y_1}{4x_1}, \text{ 从而直线 } BC \text{ 的方程为 } y + y_1 = \frac{3y_1}{4x_1}(x + x_1),$$

令 $x = x_1$, 可解得 $y = \frac{3y_1}{4x_1} \cdot (2x_1) - y_1 = \frac{y_1}{2}$,

即点 $D\left(x_1, \frac{y_1}{2}\right)$ 在直线 BC 上, 故 B, C, D 三点共线.12 分

法二: (通过坐标运算转化, 证明 $k_{BC} = k_{BD}$)

由 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$, 得 $AC \perp AB$, 即有 $k_{AC} \cdot k_{AB} = -1$, 则 $k_{AC} = -\frac{1}{k_{AB}} = -\frac{x_1}{y_1}$

同法一, 应用“点差法”得到 $k_{AC} \cdot k_{BC} = -\frac{3}{4}$, 即有 $k_{BC} = -\frac{3}{4k_{AC}} = \frac{3y_1}{4x_1}$,

又由 $B(-x_1, -y_1)$, $D\left(x_1, \frac{y_1}{2}\right)$, 则 $k_{BD} = \frac{\frac{y_1}{2} + y_1}{x_1 + x_1} = \frac{3y_1}{4x_1}$,

$\therefore k_{BC} = k_{BD}$, 故 B, C, D 三点共线.12 分

(说明: 此问也可通过借助坐标运算证明 $\overrightarrow{BC} \parallel \overrightarrow{BD}$, 得到三点共线, 具体方法过程略.)

22. 解: (I) 由题可得 $\rho^2 = \frac{2}{1 + \sin^2 \theta}$, 即有 $\rho^2 + \rho^2 \sin^2 \theta = 2$,

结合转换公式 $\rho^2 = x^2 + y^2$, $\rho \sin \theta = y$,

代入整理 $x^2 + 2y^2 = 2$,

经检验, 曲线 C 的直角坐标方程为 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$5 分

(II) 由已知易得, 直线 l 经过定点 $(-1, 0)$, 且其倾斜角为 $\frac{\pi}{4}$,

由此其参数方程也可改写为 $\begin{cases} x = -1 + \frac{\sqrt{2}}{2}t \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}t \end{cases}$ (t 为参数), (也称之为该直线的标准参数方程)

将其代入 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$, 整理可得 $3t^2 - 2\sqrt{2}t - 2 = 0$, 显然其 $\Delta > 0$,

设 M, N 两点对应的参数分别为 t_1, t_2 , 则有 $t_1 + t_2 = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, $t_1 t_2 = -\frac{2}{3}$,

所以 $|MN| = |t_1 - t_2| = \sqrt{(t_1 + t_2)^2 - 4t_1 t_2} = \frac{4\sqrt{2}}{3}$10 分

(说明: 显然, 此问也可直接解出参数值求之, 或者用直线的普通方程与曲线 C 联立求解之.)

23. 解: (I) 法一: 由题得 $f(x) = \begin{cases} -1, x \leq 1 \\ 2x-3, 1 < x < 2, \\ 1, x \geq 2 \end{cases}$

其中, 当 $1 < x < 2$ 时, $f(x) \in (-1, 1)$, 从而易得函数 $f(x)$ 的值域为 $[-1, 1]$5 分

法二: 由绝对值不等式的性质可得, $|f(x)| = ||x-1| - |x-2|| \leq |(x-1) - (x-2)| = 1$,

所以 $-1 \leq f(x) \leq 1$, 当且仅当 $(x-1)(x-2) \geq 0$, 即 $x \leq 1$ 或 $x \geq 2$ 时取得等号,

故函数 $f(x)$ 的值域为 $[-1, 1]$5 分

(II) 法一: 由基本不等式, 得 $\frac{1}{2a^2} + \frac{1}{2b^2} = \left(\frac{1}{2a^2} + \frac{1}{2b^2} \right) (a^2 + b^2) = 1 + \frac{b^2}{2a^2} + \frac{a^2}{2b^2} \geq 2$,

当且仅当 $a = b = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时取得等号, 故 $\frac{1}{2a^2} + \frac{1}{2b^2}$ 的最小值为 2.7 分

法二: 由柯西不等式, 得 $\frac{1}{2a^2} + \frac{1}{2b^2} = \left(\frac{1}{2a^2} + \frac{1}{2b^2} \right) (a^2 + b^2) \geq \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 = 2$,

当且仅当 $a = b = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时取得等号, 故 $\frac{1}{2a^2} + \frac{1}{2b^2}$ 的最小值为 2.7 分

由题得, $4f(x) \leq 2$, 即 $|x-1| - |x-2| \leq \frac{1}{2}$, 结合 (I) 之法一 (零点分段, 讨论求解)

等价于 $\begin{cases} x \leq 1 \\ -1 \leq \frac{1}{2} \end{cases}$ 或 $\begin{cases} 1 < x < 2 \\ 2x-3 \leq \frac{1}{2} \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x \geq 2 \\ 1 \leq \frac{1}{2} \end{cases}$, 由此可解得 $x \leq \frac{7}{4}$,

故原不等式的解集为 $\left(-\infty, \frac{7}{4} \right]$10 分