

成都七中高 2023 届高三下期入学考试数学试卷（理科）

参考答案

一、选择题：ACCAD；BCBDC；BC.

二、填空题： $\frac{8}{5}$ ；20； $f(x) = 2x^2 + 1$ (答案不唯一)； $\frac{\pi}{4}$.

三、解答题：

17.解：(1) 设等差数列的公差为 d ，等比数列的公比为 q ，由条件可知， $a_1 + a_2 + a_3 = 3a_2 = 15$ ，得 $a_2 = 5$ ， $d = a_2 - a_1 = 3$ ，所以 $a_n = 2 + (n-1) \times 3 = 3n - 1$ 等比数列中， $b_1 b_2 b_3 = b_2^3 = 64$ ，则 $b_2 = 4$ ， $q = \frac{b_2}{b_1} = 2$ ，所以 $b_n = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$ ；……………4 分

$$(2) c_n = \begin{cases} 3n-1, n \text{ 为奇数} \\ 2^{\frac{n}{2}}, n \text{ 为偶数} \end{cases}, \text{ 对数列 } \{3n-1\}, n \text{ 为奇数时}, 3(n+2)-1-(3n-1)=6,$$

所以数列 $\{c_n\}$ 的奇数项是首项为 2，公差为 6 的等差数列，对数列 $\left\{2^{\frac{n}{2}}\right\}, n \text{ 为偶数}, \frac{2^{\frac{n+2}{2}}}{2^{\frac{n}{2}}} = 2$ ，所以数列 $\{c_n\}$ 的偶数项是首项为 2，公比为 2 的等比数列，

$$\text{所以数列 } \{c_n\} \text{ 的前 20 项和为: } c_1 + c_2 + c_3 + \dots + c_{20} = (c_1 + c_3 + \dots + c_{19}) + (c_2 + c_4 + \dots + c_{20}) \\ = \frac{10(2+56)}{2} + \frac{2(1-2^{10})}{1-2} = 290 + 2^{11} - 2 = 2^{11} + 288 = 2336. \quad \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

18.解：(1) 由题意可得第四组的人数为 $100 \times 0.16 = 16$ ，所以 $m = 100 - 14 - 36 - 16 - 4 = 30$ ，

$$n = \frac{4}{100} = 0.04, \text{ 又 } [60, 70) \text{ 内的频率为 } \frac{30}{100} = 0.3, \text{ 所以 } x = \frac{0.3}{10} = 0.03,$$

$$[90, 100) \text{ 内的频率为 } 0.04, \text{ 所以 } y = \frac{0.04}{10} = 0.004 \quad \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

(2) 由频率分布表可得该地区抽取“美食客”的概率为 $0.16 + 0.04 = 0.2$ ，由题意 ξ 可取 0, 1, 2, 3，且 $\xi \sim B(3, \frac{1}{5})$

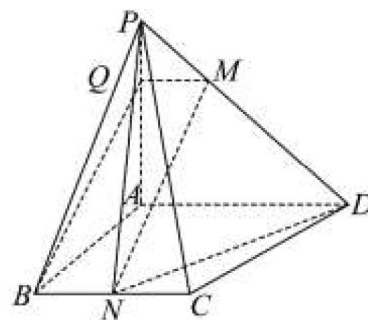
$$\text{所以 } P(\xi = 0) = C_3^0 \left(\frac{1}{5}\right)^0 \left(\frac{4}{5}\right)^3 = \frac{64}{125}, \quad P(\xi = 1) = C_3^1 \left(\frac{1}{5}\right)^1 \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{48}{125}$$

$$P(\xi = 2) = C_3^2 \left(\frac{1}{5}\right)^2 \left(\frac{4}{5}\right)^1 = \frac{12}{125}, \quad P(\xi = 3) = C_3^3 \left(\frac{1}{5}\right)^3 \left(\frac{4}{5}\right)^0 = \frac{1}{125}$$

所以 ξ 的分布列为：

ξ	0	1	2	3
P	$\frac{64}{125}$	$\frac{48}{125}$	$\frac{12}{125}$	$\frac{1}{125}$

$$E(\xi) = 3 \times \frac{1}{5} = \frac{3}{5} \quad \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

19. (1) 取 PA 的一个靠近点 P 的三等分点 Q ，连接 MQ, QB ，因为 $\overrightarrow{DM} = 2\overrightarrow{MP}$ ，所以 $MQ \parallel AD$ 且 $QM = \frac{1}{3}AD = 1$ ，又因为 $AD \parallel BC$ ，且 $BC = 2$ ，点 N 为 BC 中点，所以 $BN \parallel MQ$ 且 $BN = MQ$ ，则四边形 $MQBN$ 为平行四边形所以 $MN \parallel BQ$ ， $MN \not\subset$ 平面 PAB ， $BQ \subset$ 平面 PAB ，所以直线 $MN \parallel$ 平面 PAB ；……………5 分

(2) 如图所示, 以点A为坐标原点, 以AB所在直线为x轴, 以AD所在直线为y轴, 以AP所在直线为z轴建立空间直角坐标系, 则 $B(2,0,0), C(2,2,0), D(0,3,0), P(0,0,3)$, 又N为BC的中点, 则 $N(2,1,0)$, 所以 $\overrightarrow{PD} = (0,3,-3), \overrightarrow{CD} = (-2,1,0), \overrightarrow{PN} = (2,1,-3), \overrightarrow{PC} = (2,2,-3)$,

设平面CPD的法向量为 $\vec{n}_1 = (x, y, z)$, 则

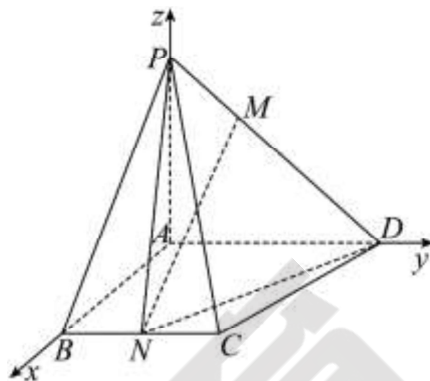
$$\begin{cases} \overrightarrow{PD} \cdot \vec{n}_1 = 3y - 3z = 0 \\ \overrightarrow{CD} \cdot \vec{n}_1 = -2x + y = 0 \end{cases}, \text{令 } x = 1, \text{ 则 } \vec{n}_1 = (1, 2, 2)$$

设平面CPN的法向量为 $\vec{n}_2 = (a, b, c)$, 则

$$\begin{cases} \overrightarrow{PC} \cdot \vec{n}_2 = 2a + 2b - 3c = 0 \\ \overrightarrow{PN} \cdot \vec{n}_2 = 2a + b - 3c = 0 \end{cases}, \text{令 } a = 3, \text{ 则 } \vec{n}_2 = (3, 0, 2)$$

$$\text{所以 } \cos \langle \vec{n}_1, \vec{n}_2 \rangle = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} = \frac{3+4}{\sqrt{1+4+4} \cdot \sqrt{9+4}} = \frac{7\sqrt{13}}{39}$$

所以二面角N-PC-D的余弦值为 $-\frac{7\sqrt{13}}{39}$12分



20.解: (1) 解: 由题意, 设椭圆半焦距为c, 则 $\frac{c}{a} = \frac{1}{2}$, 即 $\frac{c^2}{a^2} = 1 - \frac{b^2}{a^2} = \frac{1}{4}$, 得 $b = \frac{\sqrt{3}}{2}a$;

设 $B(x_1, y_1)$, $S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2}a|y_1|$, 由 $|y_1| \leq b$, 所以 $S_{\Delta OAB}$ 的最大值为 $\frac{1}{2}ab$, 将 $b = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ 代入 $\frac{1}{2}ab = \sqrt{3}$,

有 $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \sqrt{3}$, 解得 $a = 2, b = \sqrt{3}$, 所以椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$;4分

(2) 解: 设 $C(x_2, y_2)$, 因为点B为椭圆E上异于左、右顶点的动点, 则直线BC不与x轴重合

设直线BC方程为 $x = my + t$, 与椭圆方程联立得 $(3m^2 + 4)y^2 + 6mty + 3t^2 - 12 = 0$,

$$\Delta = 36m^2t^2 - 12(3m^2 + 4)(t^2 - 4) > 0, \text{ 可得 } t^2 < 3m^2 + 4,$$

$$\text{由韦达定理可得 } y_1 + y_2 = -\frac{6mt}{3m^2 + 4}, y_1 y_2 = \frac{3t^2 - 12}{3m^2 + 4}$$

$$\text{直线BA的方程为 } y = \frac{y_1}{x_1 - 2}(x - 2), \text{ 令 } x = t \text{ 得点M纵坐标 } y_M = \frac{y_1(t - 2)}{x_1 - 2},$$

$$\text{同理可得点N纵坐标 } y_N = \frac{y_2(t - 2)}{x_2 - 2}$$

当O、A、M、N四点共圆, 由相交弦定理可得 $|PA| \cdot |PO| = |PM| \cdot |PN|$, 即 $t(t - 2) = |y_M y_N|$,

$$\begin{aligned} y_M y_N &= \frac{y_1 y_2 (t - 2)^2}{(x_1 - 2)(x_2 - 2)} = \frac{y_1 y_2 (t - 2)^2}{(my_1 + t - 2)(my_2 + t - 2)} = \frac{y_1 y_2 (t - 2)^2}{m^2 y_1 y_2 + m(t - 2)(y_1 + y_2) + (t - 2)^2} \\ &= \frac{3(t^2 - 4)(t - 2)^2}{3m^2(t^2 - 4) - 6m^2 t(t - 2) + (3m^2 + 4)(t - 2)^2} = \frac{3(t + 2)(t - 2)^2}{3m^2(t + 2) - 6m^2 t + (3m^2 + 4)(t - 2)} \\ &= \frac{3(t + 2)(t - 2)^2}{4(t - 2)} = \frac{3}{4}(t + 2)(t - 2), \text{ 由 } t > 2, \text{ 故 } t(t - 2) = \frac{3}{4}(t + 2)(t - 2), \text{ 解得 } t = 6. \text{12分} \end{aligned}$$

21. 解: (1) 函数 $f(x)$ 定义域为 $(0, +\infty)$, $f'(x) = \frac{(2x-1)e^x}{2\sqrt{x}}$, 由 $f'(x) = 0$ 得 $x = \frac{1}{2}$,

当 $0 < x < \frac{1}{2}$, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单减; 当 $x > \frac{1}{2}$, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单增;

函数 $f(x)$ 的单调递减区间是 $(0, \frac{1}{2})$; 单调递增区间是 $(\frac{1}{2}, +\infty)$3分

(2) 令 $h(x) = \frac{e^x x^{-\frac{1}{2}}}{x+1}$, 其定义域为 $(0, +\infty)$ $h'(x) = \frac{(x-1)(2x+1)e^x}{2\sqrt{x}x(x+1)^2}$,

当 $x \in (0, 1)$, $h'(x) < 0$, $h(x)$ 单减, 当 $x \in (1, +\infty)$, $h'(x) > 0$, $h(x)$ 单增;

$h(x)_{\min} = h(1) = \frac{e}{2}$, $h(x)$ 的最小值是 $\frac{e}{2}$;7 分

(3) 由 (2) 可知 $\frac{e^x x^{-\frac{1}{2}}}{x+1} \geq \frac{e}{2}$, 即 $e^x x^{-\frac{1}{2}} \geq \frac{e}{2}x + \frac{e}{2}$, 直线 $y = \frac{e}{2}x + \frac{e}{2}$ 为函数 $f(x)$ 的一条切线,

$f'(x) = \frac{(2x-1)e^x}{2\sqrt{x}x}$, 取 $x = \frac{1}{4}$, $f'(\frac{1}{4}) = -2e^{\frac{1}{4}}$, $f(\frac{1}{4}) = 2e^{\frac{1}{4}}$

切线方程 $y - 2e^{\frac{1}{4}} = -2e^{\frac{1}{4}}(x - \frac{1}{4})$, 即 $y = -2e^{\frac{1}{4}}x + \frac{5}{2}e^{\frac{1}{4}}$ (下证此切线在函数 $f(x)$ 图像下方)

令 $m(x) = e^x x^{-\frac{1}{2}} + 2e^{\frac{1}{4}}x - \frac{5}{2}e^{\frac{1}{4}}$, $m'(x) = \frac{(2x-1)e^x}{2\sqrt{x}x} + 2e^{\frac{1}{4}}$, 又令 $\varphi(x) = \frac{(2x-1)e^x}{2\sqrt{x}x} + 2e^{\frac{1}{4}}$

$\varphi'(x) = \frac{1}{4}x^{-\frac{5}{2}}(4x^2 - 4x + 3)e^x > 0$, 则 $m'(x)$ 单增, $m'(\frac{1}{4}) = 0$,

$x < \frac{1}{4}$, $m(x)$ 单减, $x > \frac{1}{4}$, $m(x)$ 单增, $m(x) \geq m(\frac{1}{4}) = 0$

所以函数 $f(x)$ 图像夹在直线 $y = -2e^{\frac{1}{4}}x + \frac{5}{2}e^{\frac{1}{4}}$ 和直线 $y = \frac{e}{2}x + \frac{e}{2}$ 之间,

直线 $y = m$ 与直线 $y = -2e^{\frac{1}{4}}x + \frac{5}{2}e^{\frac{1}{4}}$ 的交点为 $(\frac{5}{4} - \frac{e^{\frac{1}{4}}}{2}m, m)$,

与直线 $y = \frac{e}{2}x + \frac{e}{2}$ 的交点为 $(\frac{2m}{e} - 1, m)$,

不妨设 $x_1 < x_2$, 则 $|AB| = |x_1 - x_2| \leq \frac{2m}{e} - 1 - \frac{5}{4} + \frac{e^{\frac{1}{4}}}{2}m = (\frac{e^{\frac{1}{4}}}{2} + \frac{2}{e})m - \frac{9}{4}$12 分

22. 解: (1) $\begin{cases} x = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}t \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}t \end{cases}$, 则 $x + y = 1$, $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$,

曲线 C_1 的极坐标方程为 $\rho(\cos \theta + \sin \theta) = 1$,

由 $\rho = 2(\cos \theta - \sin \theta)$, 得 $x^2 + y^2 = 2x - 2y$, 即曲线 C_2 的直角坐标方程为 $x^2 + y^2 - 2x + 2y = 0$.

.....5 分

(2) 由 $\rho = 2(\cos \theta - \sin \theta)$ 得 $\cos \theta - \sin \theta = \frac{\rho}{2}$, 由 $\rho(\cos \theta + \sin \theta) = 1$ 得 $\cos \theta + \sin \theta = \frac{1}{\rho}$

①² + ②² 可得 $\frac{\rho^2}{4} + \frac{1}{\rho^2} = 2$, 即 $\rho^4 - 8\rho^2 + 4 = 0$,

设 P, Q 两点所对应的极径分别为 ρ_1, ρ_2 , 则 $(\rho_1 \cdot \rho_2)^2 = 4$, 即 $|OP| \cdot |OQ| = \rho_1 \cdot \rho_2 = 2$10 分

23. 法一 (1) 解: 当 $x < -\frac{3}{2}$ 时, $f(x) = 2|x+1| - |2x+3| = -2x - 2 + 2x + 3 = 1$

当 $-\frac{3}{2} \leq x \leq -1$ 时, $f(x) = 2|x+1| - |2x+3| = -2x - 2 - 2x - 3 = -4x - 5$

当 $x > -1$ 时, $f(x) = 2|x+1| - |2x+3| = 2x + 2 - 2x - 3 = -1$

$$\text{所以 } f(x) = 2|x+1| - |2x+3| = \begin{cases} 1, & x < -\frac{3}{2} \\ -4x-5, & -\frac{3}{2} \leq x \leq -1 \\ -1, & x > -1 \end{cases}$$

因为当 $-\frac{3}{2} \leq x \leq -1$ 时，函数 $f(x)$ 单调递减， $x < -\frac{3}{2}$ 或 $x > -1$ 时，函数为常函数，

所以，函数 $f(x)$ 的最大值为 1，即 $m=1$ 。……5 分

法二：由三角不等式可得 $f(x) = |2x+2| - |2x+3| \leq |2x+2-2x-3| = 1$

当 $x < -\frac{3}{2}$ 取等号，即 $m=1$ 。……5 分 全科试题免费下载公众号《高中僧课堂》

(2) 解：因为 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq 2\sqrt{\frac{1}{ab}}$ ， $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 2\sqrt{\frac{1}{bc}}$ ， $\frac{1}{a} + \frac{1}{c} \geq 2\sqrt{\frac{1}{ac}}$ ，所以 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \sqrt{\frac{1}{ab}} + \sqrt{\frac{1}{bc}} + \sqrt{\frac{1}{ac}}$ ，

因为，由 (1) 知 $m=1$ ，即 $abc=1$ ，所以 $\sqrt{\frac{1}{ab}} = \sqrt{c}$ ， $\sqrt{\frac{1}{bc}} = \sqrt{a}$ ， $\sqrt{\frac{1}{ac}} = \sqrt{b}$ ，

所以， $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$ ，当且仅当 $a=b=c$ 时等号成立，

所以 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$ ，证毕。……10 分