

成都七中高 2023 届高三下期入学考试数学试卷（文科）

参考答案

一、选择题： ACCAD； BCBDC； BC.

二、填空题： -1； 3.5； $f(x) = 2x^2 + 1$ (答案不唯一)； $\frac{16}{3}$.

三、解答题：

17. 解：(1) 设等差数列的公差为 d ，等比数列的公比为 q ，由条件可知， $a_1 + a_2 + a_3 = 3a_2 = 15$ ，得 $a_2 = 5$ ， $d = a_2 - a_1 = 3$ ，所以 $a_n = 2 + (n-1) \times 3 = 3n-1$ 等比数列中， $b_1 b_2 b_3 = b_2^3 = 64$ ，则 $b_2 = 4$ ， $q = \frac{b_2}{b_1} = 2$ ，所以 $b_n = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$ ；.....5 分

$$(2) c_n = \begin{cases} 3n-1, n \text{ 为奇数} \\ 2^{\frac{n}{2}}, n \text{ 为偶数} \end{cases}, \text{ 对数列 } \{3n-1\}, n \text{ 为奇数时}, 3(n+2)-1-(3n-1)=6,$$

所以数列 $\{c_n\}$ 的奇数项是首项为 2，公差为 6 的等差数列，对数列 $\left\{2^{\frac{n}{2}}\right\}, n \text{ 为偶数}, \frac{2^{\frac{n+2}{2}}}{2^{\frac{n}{2}}} = 2$ ，所以数列 $\{c_n\}$ 的偶数项是首项为 2，公比为 2 的等比数列，所以数列 $\{c_n\}$ 的前 20 项和为： $c_1 + c_2 + c_3 + \dots + c_{20} = (c_1 + c_3 + \dots + c_{19}) + (c_2 + c_4 + \dots + c_{20})$

$$= \frac{10(2+56)}{2} + \frac{2(1-2^{10})}{1-2} = 290 + 2^{11} - 2 = 2^{11} + 288 = 2336. \quad \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

18. 解：(1) 由题意可得第四组的人数为 $100 \times 0.16 = 16$ ，所以 $m = 100 - 14 - 36 - 16 - 4 = 30$ ，

$$n = \frac{4}{100} = 0.04, \text{ 又 } [60, 70) \text{ 内的频率为 } \frac{30}{100} = 0.3, \text{ 所以 } x = \frac{0.3}{10} = 0.03,$$

$$[90, 100) \text{ 内的频率为 } 0.04, \text{ 所以 } y = \frac{0.04}{10} = 0.004 \quad \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

(2) 设四个人为男 1、男 2、女 1、女 2，抽两人总共有 6 种情况，有男性的情况是男 1 男 2、男 1、女 1、男 1 女 2、男 2 女 1、男 2 女 2，总共 5 种，概率为 $\frac{5}{6}$12 分19. (1) 取 PA 的一个靠近点 P 的三等分点 Q ，连接 MQ, QB ，因为

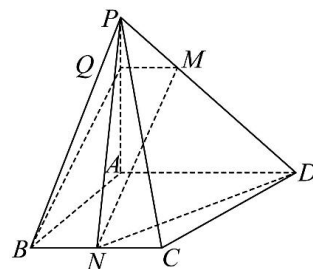
$$\overrightarrow{DM} = 2\overrightarrow{MP}, \text{ 所以 } MQ \parallel AD \text{ 且 } QM = \frac{1}{3}AD = 1$$

又因为 $AD \parallel BC$ ，且 $BC = 2$ ，点 N 为 BC 中点，所以 $BN \parallel MQ$ 且 $BN = MQ$ ，则四边形 $MQBN$ 为平行四边形所以 $MN \parallel BQ$ ， $MN \not\subset$ 平面 PAB ， $BQ \subset$ 平面 PAB ，所以直线 $MN \parallel$ 平面 PAB ；.....5 分(2) 过点 M 作 $MK \parallel PA$ ，交 AD 于 K ，连接 KN ，可知 $MK \perp$ 面 $ABCD$ ，

$$\text{所以 } MK \perp AD, \text{ 又因为 } \frac{PM}{PD} = \frac{1}{3}, \text{ 所以 } \frac{MK}{PA} = \frac{2}{3} = \frac{DK}{DA} \because PA = AD = 3, \therefore AK = 1, \therefore AK \parallel BN, AK = BN,$$

所以四边形 $AKNB$ 为平行四边形， $KN \parallel AB$ ，又因为 $AB \perp AD$ ，所以 $KN \perp AD$ ，又 $MK \cap KN = K$ ，

$$\therefore AD \perp \text{面 } MNK, \therefore MN \perp AD,$$

所以异面直线 MN 与 AD 成角为 90°12 分

20. 解：（1）解：由题意，设椭圆半焦距为 c ，则 $\frac{c}{a} = \frac{1}{2}$ ，即 $\frac{c^2}{a^2} = 1 - \frac{b^2}{a^2} = \frac{1}{4}$ ，得 $b = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ ；

设 $B(x_1, y_1)$ ， $S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2}a|y_1|$ ，由 $|y_1| \leq b$ ，所以 $S_{\triangle OAB}$ 的最大值为 $\frac{1}{2}ab$

将 $b = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ 代入 $\frac{1}{2}ab = \sqrt{3}$ ，有 $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \sqrt{3}$ ，解得 $a = 2, b = \sqrt{3}$ 。

所以椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ ；.....5 分

（2）解：设 $C(x_2, y_2)$ ，因为点 B 为椭圆 E 上异于左、右顶点的动点，则直线 BC 不与 x 轴重合
设直线 BC 方程为 $x = my + 6$ ，与椭圆方程联立得 $(3m^2 + 4)y^2 + 36my + 96 = 0$ ，

$\Delta = 1296m^2 - 384(3m^2 + 4) > 0$ 可得， $3m^2 > 32$ 全科试题免费下载公众号《高中僧课堂》

由韦达定理可得 $y_1 + y_2 = -\frac{36m}{3m^2+4}$ ， $y_1y_2 = \frac{96}{3m^2+4}$

直线 BA 的方程为 $y = \frac{y_1}{x_1-2}(x-2)$ ，令 $x = 6$ 得点 M 纵坐标 $y_M = \frac{4y_1}{x_1-2}$ ，

同理可得点 N 纵坐标 $y_N = \frac{4y_2}{x_2-2}$ ，则 $|PM| \cdot |PN| = |y_M y_N|$ ，

$$y_M y_N = \frac{16y_1y_2}{(x_1-2)(x_2-2)} = \frac{16y_1y_2}{(my_1+4)(my_2+4)} = \frac{16y_1y_2}{m^2y_1y_2 + 4m(y_1+y_2) + 16}$$

$$= \frac{16 \times 96}{96m^2 - 144m^2 + 16(3m^2+4)} = \frac{16 \times 96}{64} = 24,$$

所以 $|PM| \cdot |PN| = 24$12 分

21. 解：（1）因为 $f'(x) = \frac{1-x}{e^x} - 1 = \frac{1-x-e^x}{e^x}$ ，令 $m(x) = 1-x-e^x$ ，故 $m'(x) = -1-e^x < 0$ 恒成立，

故函数 $m(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上单调递减，而 $m(0) = 0$ ，

所以当 $x \in (-\infty, 0)$ 时， $m(x) > 0$ ， $f'(x) > 0$ ，当 $x \in (0, +\infty)$ 时， $m(x) < 0$ ， $f'(x) < 0$

故 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递增，在 $(0, +\infty)$ 上单调递减；.....5 分

（2）由 $ae^b(e^a - 1) = be^a(e^b - 1)$ 得 $\frac{a(e^a-1)}{e^a} = \frac{b(e^b-1)}{e^b}$ ，令 $g(x) = \frac{x(e^x-1)}{e^x}$ ，有 $g(a) = g(b)$

由（1）可知，函数 $g(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减，在 $(0, +\infty)$ 上单调递增，故 a, b 一正一负；

不妨设 $a < 0 < b$ ，要证 $a + b > 0$ ，即证 $a > -b$ ，即证 $g(a) < g(-b)$ ，即 $g(b) < g(-b)$

设 $h(x) = g(x) - g(-x) = x(2 - e^x - e^{-x})$ ，注意到 $h(0) = 0$

则 $h'(x) = \frac{[(x+1)e^x + x-1](1-e^x)}{e^x}$ ，令 $\varphi(x) = (x+1)e^x + x-1$ ，

则 $\varphi'(x) = (x+2)e^x + 1$ ，当 $x > 0$ 时，显然 $\varphi'(x) > 0$ 恒成立，

所以 $\varphi(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 则 $\varphi(x) > \varphi(0) = 0$,

又 $1 - e^x < 0$ 在 $x \in (0, +\infty)$ 上恒成立, 所以当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $h'(x) < 0$,

所以 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, $h(x) < h(0) = 0$,

因为 $b > 0$, 所以 $h(b) < 0$, 即 $g(b) < g(-b)$, 得证.12 分

22. 解: (1)
$$\begin{cases} x = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}t \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}t \end{cases}, \text{ 则 } x + y = 1, \quad x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta,$$

曲线 C_1 的极坐标方程为 $\rho(\cos \theta + \sin \theta) = 1$,

由 $\rho = 2(\cos \theta - \sin \theta)$, 得 $x^2 + y^2 = 2x - 2y$, 即曲线 C_2 的直角坐标方程为 $x^2 + y^2 - 2x + 2y = 0$ 5 分

(2) 由 $\rho = 2(\cos \theta - \sin \theta)$ 得 $\cos \theta - \sin \theta = \frac{\rho}{2}$, 由 $\rho(\cos \theta + \sin \theta) = 1$ 得 $\cos \theta + \sin \theta = \frac{1}{\rho}$

①² + ②² 可得 $\frac{\rho^2}{4} + \frac{1}{\rho^2} = 2$, 即 $\rho^4 - 8\rho^2 + 4 = 0$,

设 P, Q 两点所对应的极径分别为 ρ_1, ρ_2 , 则 $(\rho_1 \cdot \rho_2)^2 = 4$, 即 $|OP| \cdot |OQ| = \rho_1 \cdot \rho_2 = 2$ 10 分

23. 法一 (1) 解: 当 $x < -\frac{3}{2}$ 时, $f(x) = 2|x+1| - |2x+3| = -2x-2+2x+3=1$

当 $-\frac{3}{2} \leq x \leq -1$ 时, $f(x) = 2|x+1| - |2x+3| = -2x-2-2x-3 = -4x-5$

当 $x > -1$ 时, $f(x) = 2|x+1| - |2x+3| = 2x+2-2x-3 = -1$

所以 $f(x) = 2|x+1| - |2x+3| = \begin{cases} 1, & x < -\frac{3}{2} \\ -4x-5, & -\frac{3}{2} \leq x \leq -1 \\ -1, & x > -1 \end{cases}$

因为当 $-\frac{3}{2} \leq x \leq -1$ 时, 函数 $f(x)$ 单调递减, $x < -\frac{3}{2}$ 或 $x > -1$ 时, 函数为常函数,

所以, 函数 $f(x)$ 的最大值为 1, 即 $m=1$;5 分

法二: 由三角不等式可得 $f(x) = |2x+2| - |2x+3| \leq |2x+2-2x-3| = 1$

当 $x < -\frac{3}{2}$ 取等号, 即 $m=1$ 5 分

(2) 解: 因为 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq 2\sqrt{\frac{1}{ab}}$, $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 2\sqrt{\frac{1}{bc}}$, $\frac{1}{a} + \frac{1}{c} \geq 2\sqrt{\frac{1}{ac}}$, 所以 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \sqrt{\frac{1}{ab}} + \sqrt{\frac{1}{bc}} + \sqrt{\frac{1}{ac}}$,

因为, 由 (1) 知 $m=1$, 即 $abc=1$, 所以 $\sqrt{\frac{1}{ab}} = \sqrt{c}$, $\sqrt{\frac{1}{bc}} = \sqrt{a}$, $\sqrt{\frac{1}{ac}} = \sqrt{b}$,

所以, $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$, 当且仅当 $a=b=c$ 时等号成立,

所以 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$, 证毕.10 分