

南充市高 2023 届高考适应性考试（一诊）

文科数学参考答案

一. 选择题： 本题共 12 小题， 每小题 5 分， 共 60 分.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
B	C	B	A	A	D	D	C	C	B	A	B

二. 填空题： 本题共 4 小题， 每小题 5 分， 共 20 分.

13. 35 14. $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{6} = 1$ 15. 52π 16. $[\sqrt{3}-1, \sqrt{3}+1]$

三. 解答题

17. 解： (1) 因为 $\vec{m} = (\sqrt{3} \cos A, \sin A)$, $\vec{n} = (1, -1)$, $\vec{m} \perp \vec{n}$.

所以 $\sin A = -\sqrt{3} \cos A$, 2 分

可得 $\tan A = -\sqrt{3}$, 又 $A \in (0, \pi)$ 4 分

所以 $A = \frac{2\pi}{3}$ 6 分

(2) $a \sin B - c \sin A = 0$

由正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ 可得

$ab = ca$ 8 分

则 $b = c$, 又 $a = 2\sqrt{6}$, $A = \frac{2\pi}{3}$.

由余弦定理 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$, 得 $b = c = 2\sqrt{2}$ 10 分

所以 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2} \times (2\sqrt{2})^2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$ 12 分

18. (1) 调整前 y 关于 x 的解析式为 $y = \begin{cases} 0, & x \leq 3500 \\ (x-3500) \times 0.03, & x \in (3500, 5000] \\ 45 + (x-5000) \times 0.1, & x \in (5000, 8000] \end{cases}$; 3 分

调整后 y 关于 x 的解析式为 $y = \begin{cases} 0, & x \leq 5000 \\ (x-5000) \times 0.03, & x \in (5000, 8000] \end{cases}$; 6 分

(2) 由频率分布表可知, 从收入在 $[3000, 5000)$ 及 $[5000, 7000)$ 的人群中抽取 7 人,

其中在 $[3000, 5000)$ 元的人群中抽取人数为3人, 分别记为 A, B, C .

$[5000, 7000)$ 的人群中抽取4人, 分别记为1, 2, 3, 4.....8分

按分层抽样从7人中选2人的所有组合有: $A_1, A_2, A_3, A_4, B_1, B_2, B_3, B_4, C_1, C_2, C_3, C_4, 1_2, 1_3, 1_4, 2_3, 2_4, 3_4, AB, AC, BC$.

共有选法21种;9分

选中的2人都在 $[3000, 5000)$ 元的人有: AB, AC, BC 共有选法3种.....11分

则 $P = \frac{3}{21} = \frac{1}{7}$12分

19. (1) 取 AD 中点 O , 连接 OC, OE , 易得 $OE \perp AD, OC \perp AD$.

在 $\triangle COE$ 中, 由已知 $CE = 2\sqrt{2}, OC = AB = \sqrt{2}, OE = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2\sqrt{2} = \sqrt{6}$.

$$\therefore OC^2 + OE^2 = CE^2$$

$$\therefore OE \perp OC.$$

又 $OE \perp AD$,

$OC \cap AD = O$3分

则 $OE \perp$ 平面 $ABCD$4分

又 $OE \subset$ 平面 ADE

故平面 $EAD \perp$ 平面 $ABCD$ 得证.....6分

(2) 由 F 是棱 EB 的中点, 令 OB 的中点为 K , 连接 FK .

则 $FK \parallel EO, FK \perp$ 平面 $ABCD$8分

连接 CK , 则 $\angle FCK$ 为 CF 与平面 $ABCD$ 所成的角

由题意, 在 $\triangle CFK$ 中 $FK = \frac{\sqrt{6}}{2}, CK = 1$,10分

故 CF 与平面 $ABCD$ 所成角的正切值为 $\frac{\sqrt{6}}{2}$12分

20. (1) 根据抛物线定义可知 $3 + \frac{p}{2} = 4$

得 $p = 2$2分

所以抛物线的方程为 $y^2 = 4x$4分

(2) 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$

设直线 $l: x = ty + m$,6分

代入 $y^2 = 4x$,

得 $y^2 - 4ty - 4m = 0$

$\therefore \begin{cases} \Delta > 0 \\ y_1 + y_2 = 4t \\ y_1 \cdot y_2 = -4m \end{cases} \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$

又由 AB 为直径的圆过原点 O ，则 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$

$x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0$.

$\frac{y_1^2}{4} + \frac{y_2^2}{4} + y_1 y_2 = 0$ ，由于 $y_1 y_2 \neq 0$ ，得 $y_1 y_2 = -16$ 8 分

即 $m = 4$ 9 分

故直线 l 的方程为 $x = ty + 4$

所以直线 l 恒过定点 $(4, 0)$ 10 分

不妨设 $y_1 > 0, y_2 < 0$ ，则

$S_{\triangle MBF} + S_{\triangle BOF} = \frac{1}{2} \times 3 \times |y_1 - y_2| + \frac{1}{2} |y_2| = \frac{1}{2} (3y_1 - 4y_2) \geq \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{-12y_1 y_2} = 8\sqrt{3}$ 11 分

当且仅当 $3y_1 = -4y_2$ 时，等号成立12 分

21.(1)解: $f(x) = x \ln x - x - \frac{ax^2}{2} + 1 (x > 0, a \in \mathbf{R})$

当 $a = 1$ 时, $f(x) = x \ln x - x - \frac{x^2}{2} + 1 (x > 0)$

因为 $f'(x) = \ln x - x (x > 0)$, $f(1) = -\frac{1}{2}$, $f'(1) = -1$ 2 分

所以 $f(x)$ 在 $(1, f(1))$ 处的切线方程为: $y + \frac{1}{2} = -(x - 1)$.

即 $2x + 2y - 1 = 0$ 4 分

(2) 由 $f(x) = x \ln x - x - \frac{ax^2}{2} + 1 (x > 0, a \in \mathbf{R})$

得 $f'(x) = \ln x - ax (x > 0)$ 5 分

因为函数 $f(x)$ 有两个不同的极值点 x_1, x_2 .

所以 $f'(x) = \ln x - ax = 0$ 在 $(0, +\infty)$ 有两个不同的变号零点 x_1, x_2 . 不妨设 $0 < x_1 < x_2$.

由于 $\begin{cases} \ln x_1 - ax_1 = 0 \\ \ln x_2 - ax_2 = 0 \end{cases}$, 得 $\ln \frac{x_2}{x_1} = a(x_2 - x_1)$, 则 $\frac{1}{a} = \frac{(x_2 - x_1)}{\ln \frac{x_2}{x_1}} > 0$ 7 分

要证: $x_1 x_2 < \frac{1}{a^2}$

只需证: $x_1 x_2 < \left(\frac{x_2 - x_1}{\ln \frac{x_2}{x_1}} \right)^2$

只需证: $\sqrt{x_1 x_2} < \frac{x_2 - x_1}{\ln \frac{x_2}{x_1}}$

只需证: $\ln \frac{x_2}{x_1} < \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{x_1 x_2}} = \sqrt{\frac{x_2}{x_1}} - \sqrt{\frac{x_1}{x_2}}$ 9 分

令 $\sqrt{\frac{x_2}{x_1}} = t$, 则 $t > 1$, 只需证: $2 \ln t < t - \frac{1}{t}$ 10 分

构造函数 $h(t) = 2 \ln t - t + \frac{1}{t}$, ($t > 1$).

因为 $h'(t) = \frac{2}{t} - 1 - \frac{1}{t^2} = -\frac{(t-1)^2}{t^2} < 0$, 11 分

所以 $h(t)$ 在 $(1, +\infty)$ 单调递减

因为 $t > 1$, 所以 $h(t) < h(1) = 0$.

故原不等式成立. 12 分

22. 解: (1) 因为曲线 C 满足参数方程为 $\begin{cases} x = 2 \cos \alpha \\ y = 2 \sin \alpha \end{cases}$ (α 为参数, $\alpha \in [-\pi, 0]$)

所以曲线 C 的直角坐标方程为: $x^2 + y^2 = 4$, ($y \leq 0$) 3 分

因为直线 l 的极坐标方程为 $\rho \cos \theta + \rho \sin \theta - m = 0$. 由 $\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}$

得直线 l 直角坐标方程为 $x + y - m = 0$ 5 分

(2) 方法一:

因为直线 l 与曲线 C 交于 A, B 两点, 且 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 2$

所以 $\cos \angle AOB = \frac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{OB}|} = \frac{1}{2}$ 7 分

记 O 到 l 的距离为 d . 则

$d = \frac{|m|}{\sqrt{2}} = 2 \sin \frac{\pi}{3}$ 8 分

又 $m < 0$.

所以 $m = -\sqrt{6}$ 10 分

方法二：已知 $O(0,0)$ ，设 $A(x_1, y_1)$ ， $B(x_2, y_2)$.

则 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = x_1 x_2 + y_1 y_2 = x_1 x_2 + (m - x_1) \cdot (m - x_2) = 2x_1 x_2 - m(x_1 + x_2) + m^2 = 2$ 6 分

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ x + y - m = 0 \end{cases}$$

得 $2x^2 - 2mx + m^2 - 4 = 0$ 7 分

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ x_1 + x_2 = m < 0 \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{m^2 - 4}{2} \end{cases}$$

所以 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = (m^2 - 4) - m^2 + m^2 = 2$ 8 分

所以 $m = -\sqrt{6}$ 或 $m = \sqrt{6}$ (舍去)9 分

综上： $m = -\sqrt{6}$ 10 分

23 解：(1) $f(x) = |x-1| - |x+2| < 2x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ -3 < 2x \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} -2 < x < 1 \\ -1 - 2x < 2x \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x \leq -2 \\ 3 < 2x \end{cases} \text{3 分}$$

$$\Leftrightarrow x \in \left(-\frac{1}{4}, +\infty\right) \text{5 分}$$

$$(2) \quad f(x) = |x-1| - |x+2| = \begin{cases} -3 & x \geq 1 \\ -1-2x & -2 < x < 1 \\ 3 & x \leq -2 \end{cases} \text{6 分}$$

所以函数 $f(x)$ 的最大值为 $M = 3$.

已知正实数 a, b, c 满足 $a + b + 4c = \frac{1}{3}M = 1$ 8 分

由柯西不等式得

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = \left[\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{b}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{c}}\right)^2\right] \cdot [(\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2 + (2\sqrt{c})^2] \geq \left(\frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt{b}} \cdot \sqrt{b} + \frac{1}{\sqrt{c}} \cdot 2\sqrt{c}\right)^2 = 16$$

.....9 分

当且仅当 $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{\frac{1}{a}}} = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{\frac{1}{b}}} = \frac{2\sqrt{c}}{\sqrt{\frac{1}{c}}}$ 时, 即 $a = b = 2c$ 时, 又 $a + b + 4c = 1$.

所以当且仅当 $a = \frac{1}{4}$, $b = \frac{1}{4}$, $c = \frac{1}{8}$ 时, 等号成立.....10 分

