

秘密 ★ 启用前 【考试时间：2022 年 11 月 1 日 15:00—17:00】

绵阳市高中 2020 级第一次诊断性考试

理科数学

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将答题卡交回。

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

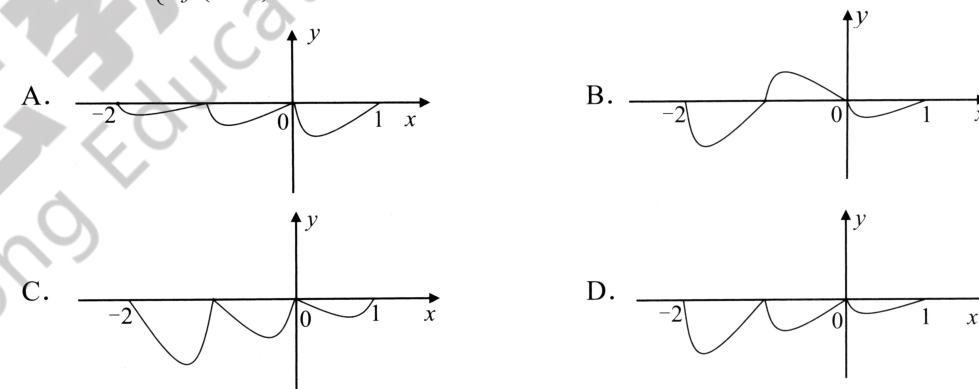
1. 已知集合 $A = \{x \in \mathbf{Z} \mid -1 \leq x \leq 3\}$, $B = \{x \mid x^2 \leq 2\}$, 则 $A \cap B =$
A. $[-1, \sqrt{2}]$ B. $\{-1, 0, 1\}$ C. $\{-1, 0, 1, 2\}$ D. $[-\sqrt{2}, 3]$
2. 若 $a > b > 0$, 则一定有
A. $\cos a < \cos b$ B. $2^a - 2^b < 0$
C. $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ D. $a^3 > b^3$
3. 若命题：“ $\forall x \in \mathbf{R}, m \geq \sin x + \cos x$ ”是真命题，则实数 m 的取值范围是
A. $m \geq \sqrt{2}$ B. $m \geq 2$
C. $m \leq -\sqrt{2}$ D. $m \leq -2$
4. 设 $a = \log_9 4$, 则 3^a 的值是
A. 1 B. 2 C. 4 D. 9
5. 在 $\triangle ABC$ 中，点 M 为边 AB 上一点， $2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$, 若 $3\overrightarrow{CM} = \lambda\overrightarrow{CA} + \mu\overrightarrow{CB}$, 则 $\mu =$
A. 3 B. 2
C. 1 D. -1
6. 已知 S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，若 $S_{19} = 57$, 则 $3a_5 - a_1 - a_4 =$
A. 2 B. 3
C. 4 D. 6

7. 某地锰矿石原有储量为 a 万吨，计划每年的开采量为本年年初储量的 m ($0 < m < 1$, 且 m 为常数) 倍，那么第 n ($n \in \mathbf{N}^*$) 年在开采完成后剩余储量为 $a(1-m)^n$, 并按该计划方案使用 10 年时间开采到原有储量的一半。若开采到剩余储量为原有储量的 70% 时，则需开采约()年。(参考数据： $\sqrt{2} \approx 1.4$)
A. 4 B. 5 C. 6 D. 8

8. 若函数 $y = \cos(\omega x + \frac{\pi}{6})$ ($\omega > 0$) 在区间 $(-\frac{\pi}{2}, 0)$ 上恰有唯一极值点，则 ω 的取值范围为

- A. $[\frac{1}{3}, \frac{7}{6}]$ B. $(\frac{1}{3}, \frac{7}{6}]$
C. $(\frac{1}{3}, \frac{7}{3}]$ D. $(\frac{2}{3}, \frac{7}{3})$

9. 函数 $f(x) = \begin{cases} x - \sqrt{x}, & 0 \leq x \leq 1, \\ 2f(x+1), & -2 \leq x < 0 \end{cases}$ 的图象大致为



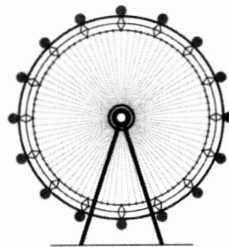
10. 已知 $(\tan 2\alpha - \tan \alpha) \cdot \cos 2\alpha = 2$, 则 $\tan \alpha =$
A. 2 B. $\sqrt{2}$ C. -2 D. $\frac{1}{2}$
11. 已知直线 $l: x + my + n = 0$ 既是曲线 $y = \ln x$ 的切线，又是曲线 $y = e^{x-2}$ 的切线，则 $m+n =$
A. 0 B. -2 C. 0 或 e D. -2 或 -e
12. 若函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 且 $f(2x+1)$ 为偶函数， $f(x-1)$ 关于点 $(3, 3)$ 成中心对称，则下列说法正确的个数为
① $f(x)$ 的一个周期为 2
② $f(22) = 3$
③ $f(x)$ 的一条对称轴为 $x = 5$
④ $\sum_{i=1}^{19} f(i) = 57$
A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

二、填空题：本大题共4小题，每小题5分，共20分。

13. 已知向量 $\mathbf{a} = (-1, 3)$, $\mathbf{b} = (1, m)$, 且 $\mathbf{a} \perp (\mathbf{a} - 2\mathbf{b})$, 则 $m =$ _____.

14. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数, 设 S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 且 $a_2 = 2$, $a_4 = 8$, 则 $S_5 =$ _____.

15. 某游乐场中的摩天轮作匀速圆周运动, 其中心距地面 20.5 米, 半径为 20 米. 假设从小军同学在最低点处登上摩天轮开始计时, 第 6 分钟第一次到达最高点. 则第 10 分钟小军同学离地面的高度为 _____ 米.



16. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x - 3, & x \geq a, \\ x - 2, & x < a, \end{cases}$ 若存在实数 m , 使得关于 x 的方程 $f(x) = m$ 恰有三个不同的实数根, 则 a 的取值范围是 _____.

三、解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17~21 题为必考题, 每个试题考生都必须作答. 第 22、23 题为选考题, 考生根据要求作答.

(一) 必考题：共 60 分.

17. (12 分)

已知函数 $f(x) = \cos x(\sqrt{3} \sin x - \cos x)$.

- (1) 求 $f(x)$ 的单调递减区间;
- (2) 求 $f(x) = -1$ 在 $[0, \pi]$ 上的解.

18. (12 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_2 = 1$, $a_{n+2} + 4a_n = 5a_{n+1}$ ($n \in \mathbf{N}^*$).

- (1) 证明: 数列 $\{a_{n+1} - a_n\}$ 是等比数列;
- (2) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

19. (12 分)

在锐角 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边为 a, b, c , 且 $a \cdot \cos B = b(1 + \cos A)$.

- (1) 证明: $\sin C = \sin 3B$;
- (2) 求 $\frac{c}{a}$ 的取值范围.

20. (12 分)

已知函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - (\frac{k}{2} + 2)x^2 + 4kx - \frac{11}{6}$ ($k \in \mathbf{R}$).

- (1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性;
- (2) 若函数 $f(x)$ 在 $(0, 3)$ 上恰有两个零点, 求函数 $f(x)$ 在 $[0, 3]$ 上的最小值.

21. (12 分)

已知函数 $f(x) = 2e^x - x^2 - ax - 2$, 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) \geq 0$.

- (1) 求 a 的取值范围;
- (2) 求证: $(1 + \frac{2}{2e-1})(1 + \frac{2}{2e^2-1})(1 + \frac{2}{2e^3-1}) \cdots (1 + \frac{2}{2e^n-1}) < 5$ ($n \in \mathbf{N}^*$).

(二) 选考题：共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答. 如果多做, 则按所做的第一题记分.

22. [选修 4—4: 坐标系与参数方程] (10 分)

在直角坐标系 xOy 中, 圆 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = 3 + 3\cos\theta, \\ y = 3\sin\theta \end{cases}$ (θ 为参数), 直线 l 的参数方程为

$$\begin{cases} x = t \cos \frac{\pi}{3}, \\ y = 6 + t \sin \frac{\pi}{3} \end{cases} \quad (t \text{ 为参数}).$$

- (1) 判断直线 l 和圆 C 的位置关系, 并说明理由;
- (2) 设 P 是圆 C 上一动点, $A(4, 0)$, 若点 P 到直线 l 的距离为 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$, 求 $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CP}$ 的值.

23. [选修 4—5: 不等式选讲] (10 分)

已知函数 $f(x) = |x + 2| + |2x + 1|$.

- (1) 求 $f(x)$ 的最小值;
- (2) 若 a, b, c 均为正数, 且 $f(a) + f(b) + f(c) = 18$, 证明: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a^2 + b^2 + c^2}$.