成都市2019级高中毕业班第一次诊断性检测

数学一诊(理科)参考答案及评分意见

第Ⅰ卷　(选择题,共60分)

一、选择题:(每小题5分,共60分)

1.C;　2.A;　3.C;　4.D;　5.D;　6.B;　7.B;　8.C;　9.B;　10.D;　11.A;　12.D.

第Ⅱ卷　(非选择题,共90分)

二、填空题:(每小题5分,共20分)

13. -80;　　14. $\frac{\pi}{2}$;　　15. $(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$;　　16. $6+4\sqrt{2}$.

三、解答题:(共70分)

17.解:(Ⅰ)设 $\{a_n\}$ 的首项为 a_1,公差为 d. ……1分

由题意,可得 $\begin{cases}2a_1+2d+a_1+4d=0\\ a_1+6d-2(a_1+3d)+2=0\end{cases}$ ……3分

解得 $a_1=2, d=-1$. ……5分

$\therefore a_n=-n+3$. ……6分

(Ⅱ)由(Ⅰ),可得 $b_n=2^{-n+3}$. ……9分

设数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 S_n,则 $S_n=b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n$.

$$\therefore S_n=\frac{4(1-\frac{1}{2^n})}{1-\frac{1}{2}}$$ ……11分

$$=8(1-\frac{1}{2^n})=8-(\frac{1}{2})^{n-3}.$$ ……12分

18.解:(Ⅰ)$\because \bar{x}=\frac{2+3+4+5+6}{5}=4$, $\bar{y}=\frac{2.5+3+4+4.5+6}{5}=4$, ……1分

$$\sum_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})=(-2)\times(-1.5)+(-1)\times(-1)+0\times0+1\times0.5+2\times2=8.5,$$

$$\sum_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})^2=4+1+0+1+4=10,$$ ……3分

$$\therefore \hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})^2}=0.85, \hat{a}=4-0.85\times4=0.6.$$ ……5分

$\therefore \hat{y}=0.85x+0.6$. ……6分

（Ⅱ）由题意可知，X 的可能取值为 0，1，2，3. ……7 分

$\because P(X=0)=\dfrac{C_3^3}{C_7^3}=\dfrac{1}{35}$，$P(X=1)=\dfrac{C_4^1C_3^2}{C_7^3}=\dfrac{12}{35}$，$P(X=2)=\dfrac{C_4^2C_3^1}{C_7^3}=\dfrac{18}{35}$，

$P(X=3)=\dfrac{C_4^3}{C_7^3}=\dfrac{4}{35}$， ……10 分

$\therefore X$ 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\dfrac{1}{35}$	$\dfrac{12}{35}$	$\dfrac{18}{35}$	$\dfrac{4}{35}$

……11 分

$\therefore EX=0\times\dfrac{1}{35}+1\times\dfrac{12}{35}+2\times\dfrac{18}{35}+3\times\dfrac{4}{35}=\dfrac{12}{7}$. ……12 分

19. **解**：（Ⅰ）$\because$ D,E 分别为 AB,AC 的中点，$\therefore DE \parallel BC$.

$\because AD\perp BC$，$\therefore AD\perp DE$.

$\therefore A'D\perp DE$. ……2 分

$\because A'D\perp BD$，$DE\subset$ 平面 $BDEC$，$DB\subset$ 平面 $BDEC$，$DE\cap DB=D$，

$\therefore A'D\perp$ 平面 $BDEC$. ……4 分

又 $A'D\subset$ 平面 $A'DB$，

$\therefore$ 平面 $A'DB\perp$ 平面 $BDEC$. ……5 分

（Ⅱ）选①.

$\because BM=BE$，$\angle BDM=\angle BDE=90^\circ$，

$\therefore \triangle BDM\cong\triangle BDE$. $\therefore DE=DM=2$.

$\therefore M$ 为 $A'D$ 的中点. ……7 分

选②.

$\because BC\parallel DE$，

$\therefore$ 直线 EM 与 BC 所成角为 $\angle MED$.

又直线 EM 与 BC 所成角的大小为 45°，$\therefore \angle MED=45^\circ$. $\because A'D\perp DE$.

$\therefore DE=DM=2$.

$\therefore M$ 为 $A'D$ 的中点. ……7 分

选③.

$\because V_{E-A'BC}=V_{A'-EBC}=\dfrac{1}{3}S_{\triangle EBC}\cdot A'D$，$V_{M-BDE}=\dfrac{1}{3}S_{\triangle BDE}\cdot MD$，$V_{M-BDE}=\dfrac{1}{4}V_{E-A'BC}$，

又 $DE=\dfrac{1}{2}BC$，即 $S_{\triangle BDE}=\dfrac{1}{2}S_{\triangle EBC}$ $\therefore A'D=2MD$.

$\therefore M$ 为 $A'D$ 的中点. ……7 分

$\because$ 过 B,C,M 三点的平面与线段 $A'E$ 相交于点 N，

$DE\parallel BC$，$BC\not\subset$ 平面 $A'DE$，

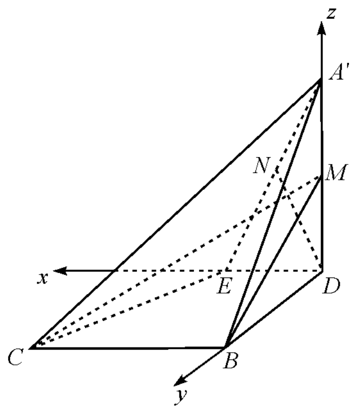
$\therefore BC \parallel$ 平面 $A'DE$.

又平面 $BMNC \cap$ 平面 $A'DE = MN$，

$\therefore BC \parallel MN$.

$\therefore N$ 为 $A'E$ 的中点. ……8 分

$\because DE, DB, DA'$ 两两互相垂直，$\therefore$ 以 D 为坐标原点，向量 $\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DA'}$ 的方向分别为 x 轴，y 轴，z 轴的正方向，建立如图所示的空间直角坐标系 $Dxyz$.



则 $D(0,0,0)$，$A'(0,0,4)$，$N(1,0,2)$，$B(0,4,0)$，$C(4,4,0)$；

$\overrightarrow{DN} = (1,0,2), \overrightarrow{BA'} = (0,-4,4), \overrightarrow{BC} = (4,0,0)$.

设平面 $A'BC$ 的一个法向量为 $\boldsymbol{m} = (x, y, z)$，直线 DN 与平面 $A'BC$ 所成的角为 θ.

由 $\begin{cases} \boldsymbol{m} \cdot \overrightarrow{BA'} = 0 \\ \boldsymbol{m} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \end{cases}$，得 $\begin{cases} -4y + 4z = 0 \\ 4x = 0 \end{cases}$.

令 $y = 1$，得 $\boldsymbol{m} = (0,1,1)$. ……10 分

则 $\sin\theta = |\cos\langle \overrightarrow{DN}, \boldsymbol{m} \rangle| = \dfrac{|\overrightarrow{DN} \cdot \boldsymbol{m}|}{|\overrightarrow{DN}||\boldsymbol{m}|} = \dfrac{2}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{10}}{5}$.

$\therefore$ 直线 DN 与平面 $A'BC$ 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{10}}{5}$. ……12 分

20. **解**：(Ⅰ)由题意，直线 PQ 的方程为 $y = k(x-2)$，其中 $k \neq 0$.

设 $B(m, 0)$，$P(\dfrac{y_1^2}{2p}, y_1)$，$Q(\dfrac{y_2^2}{2p}, y_2)$.

由 $\begin{cases} y = k(x-2), \\ y^2 = 2px \end{cases}$ 消去 x，得 $y^2 - \dfrac{2p}{k}y - 4p = 0$.

$\therefore \Delta = \dfrac{4p^2}{k^2} + 16p > 0$，$y_1 + y_2 = \dfrac{2p}{k}$，$y_1 y_2 = -4p$. ……2 分

$\because k_1 + k_2 = 0$，

$\therefore \dfrac{y_1}{\dfrac{y_1^2}{2p} - m} + \dfrac{y_2}{\dfrac{y_2^2}{2p} - m} = 0$，即 $\dfrac{y_1 y_2 (y_1 + y_2)}{2p} - m(y_1 + y_2) = 0$. ……4 分

$\therefore (\dfrac{-4p}{2p} - m) \cdot \dfrac{2p}{k} = 0$，即 $(m+2) \cdot \dfrac{2p}{k} = 0$. $\because p > 0$，$\therefore m = -2$. ……5 分

$\therefore$ 点 B 的坐标为 $(-2, 0)$. ……6 分

(Ⅱ)由题意，直线 MN 的方程为 $y = k(x - \dfrac{p}{2})$. 设 $M(\dfrac{y_3^2}{2p}, y_3)$，$N(\dfrac{y_4^2}{2p}, y_4)$.

由 $\begin{cases} y = k(x - \dfrac{p}{2}), \\ y^2 = 2px \end{cases}$ 消去 x，得 $y^2 - \dfrac{2p}{k}y - p^2 = 0$.

$\therefore \Delta = \dfrac{4p^2}{k^2} + 4p^2 > 0$，$y_3 + y_4 = \dfrac{2p}{k}$，$y_3 y_4 = -p^2$. ……8 分

$\therefore |MN|=\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}\,|y_3-y_4|=\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}\sqrt{(y_3+y_4)^2-4y_3y_4}=(1+\frac{1}{k^2})\cdot 2p$.

……9 分

又 $|AP|=\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}\,|y_1|$，$|AQ|=\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}\,|y_2|$，

$\therefore |AP|\cdot|AQ|=(1+\frac{1}{k^2})\,|y_1y_2|=(1+\frac{1}{k^2})\cdot 4p$. ……11 分

$\therefore \dfrac{|MN|}{|AP|\cdot|AQ|}=\dfrac{(1+\frac{1}{k^2})\cdot 2p}{(1+\frac{1}{k^2})\cdot 4p}=\dfrac{1}{2}$. ……12 分

21. **解**：(Ⅰ)由题意，$f'(x)=\cos x-2a$. ……1 分

$\because 2a\geqslant 1$，$\therefore$ 当 $x\in[0,\pi]$ 时，$f'(x)\leqslant 0$ 恒成立 .

$\therefore f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上单调递减 . ……2 分

$\therefore$ 当 $x=0$ 时，$f(x)$ 取得最大值为 0；当 $x=\pi$ 时，$f(x)$ 取得最小值为 $-2a\pi$.

……4 分

(Ⅱ)不等式 $f(x)\leqslant ax\cos x$ 在区间 $(0,+\infty)$ 恒成立，

即 $\sin x\leqslant 2ax+ax\cos x$ 在区间 $(0,+\infty)$ 恒成立 .

即 $\dfrac{\sin x}{2+\cos x}-ax\leqslant 0$ 在区间 $(0,+\infty)$ 恒成立 . ……5 分

$\therefore$ 当 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 时，有 $\dfrac{\sin\frac{\pi}{2}}{2+\cos\frac{\pi}{2}}-\dfrac{a\pi}{2}\leqslant 0$ 成立，即 $a\geqslant\dfrac{1}{\pi}$. ……6 分

设 $g(x)=\dfrac{\sin x}{2+\cos x}-ax$，$x\in(0,+\infty)$.

则 $g'(x)=\dfrac{2\cos x+1}{(2+\cos x)^2}-a$.

设 $h(x)=\dfrac{2\cos x+1}{(2+\cos x)^2}$. 令 $t=2\cos x+1$，$t\in[-1,3]$.

当 $t=0$ 时，$h(x)=0$；

当 $t\neq 0$ 时，$y=\dfrac{4t}{t^2+6t+9}=\dfrac{4}{t+\frac{9}{t}+6}$，即 $h(x)\in[-1,0)\cup(0,\frac{1}{3}]$.

$\therefore h(x)\in[-1,\frac{1}{3}]$. ……8 分

①当 $a\geqslant\dfrac{1}{3}$ 时，$g'(x)=\dfrac{2\cos x+1}{(2+\cos x)^2}-a\leqslant 0$，即 $g(x)=\dfrac{\sin x}{2+\cos x}-ax$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递减 . $\therefore$ 当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$g(x)<g(0)=0$，符合题意；……9 分

②当 $\frac{1}{\pi} \leqslant a < \frac{1}{3}$ 时，函数 $t = 2\cos x + 1$ 在 $(0, \frac{2\pi}{3})$ 上单调递减，函数 $y = \frac{4}{t + \frac{9}{t} + 6}$ 在 $t \in (0, 3)$ 上单调递增.

$\therefore$ 函数 $g'(x) = \frac{2\cos x + 1}{(2 + \cos x)^2} - a$ 在 $(0, \frac{2\pi}{3})$ 上单调递减.

又 $g'(0) = \frac{1}{3} - a > 0$，$g'(\frac{2\pi}{3}) = -a < 0$，

$\therefore \exists x_0 \in (0, \frac{2\pi}{3})$，使得 $g'(x_0) = 0$.

且当 $x \in (0, x_0)$，$g'(x) > 0$，即 $g(x)$ 在 $(0, x_0)$ 上单调递增，此时 $g(x_0) > g(0) = 0$，不符合题意. ……11 分

综上所述，a 的取值范围是 $[\frac{1}{3}, +\infty)$. ……12 分

22. **解**：(Ⅰ)由曲线 C 的参数方程，消去参数 α，得曲线 C 的普通方程为

$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$. ……2 分

$\because \rho\cos\theta = x$，$\rho\sin\theta = y$，$\therefore$ 直线 l 的直角坐标方程为

$x + y - 2 = 0$. ……4 分

(Ⅱ)设直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x = -1 - \frac{\sqrt{2}}{2}t, \\ y = 3 + \frac{\sqrt{2}}{2}t \end{cases}$ (t 为参数). ……6 分

将直线 l 的参数方程代入曲线 C 的普通方程，整理可得

$t^2 + 4\sqrt{2}t + 7 = 0$. …(*) ……7 分

$\Delta = (4\sqrt{2})^2 - 4 \times 7 = 4 > 0$.

设 t_1, t_2 是方程(*)的两个实数根.

$\therefore t_1 + t_2 = -4\sqrt{2}$，$t_1 t_2 = 7$. ……9 分

$\therefore |AE| \cdot |AF| = |t_1 t_2| = 7$. ……10 分

23. **解**：(Ⅰ)①当 $x \geqslant 1$ 时，$f(x) = (x-1) + 2(x+1) = 3x + 1$.

由 $f(x) < 5$，解得 $x < \frac{4}{3}$. 此时 $1 \leqslant x < \frac{4}{3}$； ……1 分

②当 $-1 < x < 1$ 时，$f(x) = -(x-1) + 2(x+1) = x + 3$.

由 $f(x) < 5$，解得 $x < 2$. 此时 $-1 < x < 1$； ……2 分

③当 $x \leqslant -1$ 时，$f(x) = -(x-1) - 2(x+1) = -3x - 1$.

由 $f(x) < 5$，解得 $x > -2$. 此时 $-2 < x \leqslant -1$. ……3 分

综上，原不等式的解集为 $(-2, \frac{4}{3})$. ……4 分

（Ⅱ）由（Ⅰ），得 $f(x)=\begin{cases}3x+1, x\geqslant 1\\ x+3, -1<x<1\\ -3x-1, x\leqslant -1\end{cases}$. ……5 分

当 $x=-1$ 时，$f(x)$ 取得最小值 2.

$\therefore m=2$. ……6 分

$\therefore a+2b+3c=2$.

由柯西不等式，得 $(3a^2+2b^2+c^2)(\frac{1}{3}+2+9)\geqslant(a+2b+3c)^2=4$. ……8 分

$\therefore 3a^2+2b^2+c^2\geqslant\frac{6}{17}$. ……9 分

当且仅当 $\frac{\sqrt{3}a}{\sqrt{\frac{1}{3}}}=\frac{\sqrt{2}b}{\sqrt{2}}=\frac{c}{3}$，即 $a=\frac{1}{17}, b=\frac{3}{17}, c=\frac{9}{17}$ 时，等号成立.

$\therefore 3a^2+2b^2+c^2$ 的最小值为 $\frac{6}{17}$. ……10 分