# 绵阳市高中 2019 级第一次诊断性考试

## 理科数学参考答案及评分意见

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分．

CDBCC　AABDD　AD

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．

13．7　　　14．2　　　15．$\frac{3}{2}$　　　16．$[1，2\sqrt{2}]$

三、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分．

17．解：（1）$f(x)=\sqrt{3}(1+\cos 2\omega x)+\sin 2\omega x-\sqrt{3}$

$=\sqrt{3}\cos 2\omega x+\sin 2\omega x$

$=2\sin(2\omega x+\frac{\pi}{3})$．……………………………………4 分

∵相邻对称轴间距离为 $\frac{\pi}{2}$，

∴函数的最小正周期 $T=\pi$，即 $\frac{2\pi}{2|\omega|}=\pi(\omega>0)$，解得 $\omega=1$，

∴ $f(x)=2\sin(2x+\frac{\pi}{3})$．……………………………………6 分

由 $-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant 2x+\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi$，得 $-\frac{5\pi}{12}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{12}+k\pi$ ( $k\in Z$ )，

∴函数 $f(x)$ 在 $[0，\frac{\pi}{2}]$ 上的单调递增区间为 $[0，\frac{\pi}{12}]$．……………………8 分

（2）将函数 $f(x)=2\sin(2x+\frac{\pi}{3})$ 的图象向左平移 $\varphi(0<\varphi<\frac{\pi}{2})$ 个单位后得

$g(x)=2\sin[2(x+\varphi)+\frac{\pi}{3}]=2\sin(2x+2\varphi+\frac{\pi}{3})$，

∵ $g(x)$ 为偶函数，

∴ $g(0)=\pm 2$，即 $\sin(2\varphi+\frac{\pi}{3})=\pm 1$，……………………………………10 分

∴ $2\varphi+\frac{\pi}{3}=k\pi+\frac{\pi}{2}$，即 $\varphi=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{12}(k\in Z)$．

又 $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$，

∴ $\varphi=\frac{\pi}{12}$．……………………………………………………12 分

18．解：（1）$\because$ $S_{n+1}=3S_n+2$ ①，

$\therefore$ $S_2=3S_1+2$，即 $a_1+a_2=3a_1+2$．

$\because$ $a_1=2$，$\therefore$ $a_2=6$． ……………………………………………………2 分

当 $n\geqslant 2$ 时，$S_n=3S_{n-1}+2$． ②

由①－②得 $a_{n+1}=3a_n$，即 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=3(n\geqslant 2)$．又 $\dfrac{a_2}{a_1}=3$，

$\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 是以首项为 2，公比为 3 的等比数列． ………………………… 5 分

$\therefore$ $a_n=2\times 3^{n-1}$． ……………………………………………………………… 6 分

（2）由 $n\cdot a_n=2n\cdot 3^{n-1}$， ……………………………………………………7 分

得 $T_n=2(1\times 3^0+2\times 3^1+\cdots+n\times 3^{n-1})$ ①

$3T_n=2(1\times 3^1+2\times 3^2+\cdots+n\times 3^n)$ ②

由①－②，得 $-2T_n=2(3^0+3^1+3^2+\cdots+3^{n-1}-n\cdot 3^n)$，

$$-2T_n=2\times\frac{1-3^n}{1-3}-2n\cdot 3^n=(1-2n)3^n-1.$$

$\therefore$ $T_n=(n-\dfrac{1}{2})3^n+\dfrac{1}{2}$． …………………………………………………………12 分

19．解：选择条件①：由 $b\tan C=(2a-b)\tan B$，得 $\dfrac{b\sin C}{\cos C}=\dfrac{(2a-b)\sin B}{\cos B}$，

由正弦定理可得，$\sin B\sin C\cos B=(2\sin A-\sin B)\sin B\cos C$．

$\therefore$ $\sin C\cos B=2\sin A\cos C-\sin B\cos C$，

$\therefore$ $2\sin A\cos C=\sin C\cos B+\sin B\cos C=\sin(C+B)=\sin A$，

$\because$ $C\in(0,\ \pi)$，$\therefore$ $\sin C\neq 0$，

$\therefore$ $\cos A=\dfrac{1}{2}$，又 $A\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，$\therefore$ $A=\dfrac{\pi}{3}$．

选择条件②：由正弦定理可得，$2\sin C\cos B=2\sin A-\sin B$，

又 $\sin A=\sin(C+B)$，

$\therefore$ $2\sin C\cos B=2\sin(C+B)-\sin B=2(\sin C\cos B+\cos C\sin B)-\sin B$，

化简整理得 $2\cos C\sin B=\sin B$，

由 $\sin B\neq 0$，$\therefore$ $\cos C=\dfrac{1}{2}$，

又 $0<C<\dfrac{\pi}{2}$，$\therefore$ $C=\dfrac{\pi}{3}$．

选择条件③：由已知得，$b^2+a^2-c^2=ac\cos A+a^2\cos C$，

由余弦定理，得 $b^2+a^2-c^2=2ab\cos C$，

∵ $b^2+c^2-a^2=ac\cos C+c^2\cos A$，

∴ $2ab\cos C=ac\cos A+a^2\cos C$，

∵ $a>0$，∴ $2b\cos C=c\cos A+a\cos C$，

由正弦定理，有 $2\sin B\cos C=\sin C\cos A+\sin A\cos C=\sin(A+C)=\sin B$，

∵ $\sin B\neq 0$，∴ $\cos C=\frac{1}{2}$.

又 $C\in(0,\frac{\pi}{2})$，∴ $C=\frac{\pi}{3}$. ……………………………………………………4 分

（1）证明：由正弦定理得 $\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}=2\sqrt{3}$，

∴ $a=2\sqrt{3}\sin A$，

∴ $a=2\sqrt{3}\sin A=2\sqrt{3}\sin(B+\frac{\pi}{3})=\sqrt{3}\sin B+3\cos B$，得证. ……………………………6 分

（2）由 $AP=2PB$ 及 $AB=3$，可得 $PB=1$，

在△$PBC$ 中，由余弦定理可得，

$CP^2=a^2+1-2a\cos B=(\sqrt{3}\sin B+3\cos B)^2+1-2(\sqrt{3}\sin B+3\cos B)\cos B$

$=4+2\sqrt{3}\sin 2B$. ……………………………………………………………9 分

∵△$ABC$ 为锐角三角形，∴ $B\in(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2})$，即 $2B\in(\frac{\pi}{3},\pi)$.

当 $2B=\frac{\pi}{2}$，即 $B=\frac{\pi}{4}$ 时，$CP^2$ 取最大值为 $4+2\sqrt{3}$.

∴线段 $CP$ 的长度的最大值为 $1+\sqrt{3}$. ……………………………………12 分

20．**解**：（1）由题意得 $f'(x)=-x^2+2ax+3a^2=-(x-3a)(x+a)$. ………………1 分

当 $a=-1$ 时，$f'(x)=-(x-1)(x+3)$，$x\in[-4，2]$.

由 $f'(x)>0$，解得 $-3<x<1$；

由 $f'(x)<0$，解得 $-4\leqslant x<-3$ 或 $1<x\leqslant 2$. ……………………………………3 分

∴函数 $f(x)$ 在区间 $(-3，1)$ 上单调递增，在区间 $[-4，-3)$，$(1，2]$ 单调递减.

又 $f(-4)=-\frac{25}{3}$，$f(-3)=-\frac{32}{3}$，$f(1)=0$，$f(2)=-\frac{7}{3}$，

∴函数 $f(x)$ 在区间 $[-4，2]$ 上的最大值为 0，最小值为 $-\frac{32}{3}$. ………………6 分

（2）存在实数 $m$，使不等式 $f(x)<0$ 的解集恰好为 $(m, +\infty)$，

等价于函数 $f(x)$ 只有一个零点．

∵ $f'(x)=-x^2+2ax+3a^2=-(x-3a)(x+a)$，

i) 当 $a<0$ 时，由 $f'(x)>0$，解得 $3a<x<-a$，

∴函数 $f(x)$ 在区间 $(3a, -a)$ 上单调递增；

由 $f'(x)<0$，解得 $x<3a$ 或 $x>-a$，

∴函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, 3a)$，$(-a, +\infty)$ 上单调递减．

又 $f(0)=-\dfrac{5}{3}<0$，

∴只需要 $f(-a)<0$，解得 $-1<a<0$．

∴实数 $a$ 的取值范围为 $-1<a<0$．

ii) 当 $a=0$ 时，显然 $f(x)$ 只有一个零点成立．……………………………………10 分

iii) 当 $a>0$ 时，由 $f'(x)>0$，解得 $-a<x<3a$，

即 $f(x)$ 在区间 $(-a, 3a)$ 上单调递增；

由 $f'(x)<0$，解得 $x<-a$ 或 $x>3a$，

即函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, -a)$，$(3a, +\infty)$ 上单调递减；

又 $f(0)=-\dfrac{5}{3}<0$，∴只需要 $f(3a)<0$，解得 $0<a<\dfrac{\sqrt[3]{5}}{3}$．

综上：实数 $a$ 的取值范围是 $(-1,\dfrac{\sqrt[3]{5}}{3})$．……………………………………12 分

21．**解**：（1）由题意得 $f'(x)=(x+1)e^x-b(\ln x+1)-x$．…………………………1 分

∵函数 $f(x)$ 的图象在点 $(1, f(1))$ 处的切线的斜率为 $2e-3$，

∴ $f'(1)=2e-b-1=2e-3$，解得 $b=2$．……………………………………3 分

当 $x>1$ 时，$f(x)>xe^x-\dfrac{3}{2}x^2+1$ 等价于 $x^2-2x\ln x-1>0$，即 $x-2\ln x-\dfrac{1}{x}>0$．

令 $F(x)=x-2\ln x-\dfrac{1}{x}$，

则 $F'(x)=1-\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{(x-1)^2}{x^2}>0$．

∴函数 $F(x)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上单调递增，

∴ $F(x)>F(1)=0$，

∴当 $x>1$ 时，$f(x)>xe^x-\dfrac{3}{2}x^2+1$．……………………………………6 分

（2）由题得 $g(x)=x\mathrm{e}^x-2x\ln x-\dfrac{1}{2}x^2+(4-a)x-1$.

若 $g(x)=f(x)+(4-a)x-1$ 无极值，则 $g'(x)\geqslant 0$ 恒成立或 $g'(x)\leqslant 0$ 恒成立.

i)当 $g'(x)\geqslant 0$ 恒成立时， $g'(x)=(x+1)\mathrm{e}^x-2(1+\ln x)-x+4-a\geqslant 0$ ，

即 $a-2\leqslant[(x+1)\mathrm{e}^x-2\ln x-x]_{\min}$.

令 $h(x)=(x+1)\mathrm{e}^x-2\ln x-x$.

$\therefore$ $h'(x)=(x+2)\mathrm{e}^x-\dfrac{2}{x}-1=(x+2)\mathrm{e}^x-\dfrac{(x+2)}{x}=(x+2)(\mathrm{e}^x-\dfrac{1}{x})\ (x>0)$.

令 $\varphi(x)=\mathrm{e}^x-\dfrac{1}{x}$，则 $\varphi'(x)=\mathrm{e}^x+\dfrac{1}{x^2}>0$,

即 $\varphi(x)$ 在 $(0，+\infty)$上单调递增. ……………………………………………8 分

又 $\varphi(\dfrac{1}{2})=\sqrt{\mathrm{e}}-2<\sqrt{4}-2=0$，$\varphi(1)=\mathrm{e}-1>0$，

$\therefore$ 存在 $x_0\in(\dfrac{1}{2}，1)$，使得 $\varphi(x_0)=\mathrm{e}^{x_0}-\dfrac{1}{x_0}=0$.

$\therefore$ 当 $x\in(0，x_0)$时， $\varphi(x)<0$，即 $h'(x)<0$，

$\therefore$ 函数 $h(x)$在区间 $(0，x_0)$单调递减.

当 $x\in(x_0,+\infty)$时， $\varphi(x)>0$，即 $h'(x)>0$，

$\therefore$ 函数 $h(x)$在区间 $(x_0,+\infty)$单调递增.

$\therefore$ 函数 $h(x)$的最小值为 $h(x_0)=(x_0+1)\mathrm{e}^{x_0}-2\ln x_0-x_0$. ………………………10 分

又 $\mathrm{e}^{x_0}=\dfrac{1}{x_0}$，即 $x_0=-\ln x_0$，

代入，得 $h(x_0)=(x_0+1)\mathrm{e}^{x_0}-2\ln x_0-x_0=1+\dfrac{1}{x_0}+2x_0-x_0=1+x_0+\dfrac{1}{x_0}$.

又 $x_0\in(\dfrac{1}{2}，1)$，则 $h(x_0)==1+x_0+\dfrac{1}{x_0}\in(3，\dfrac{7}{2})$.

$\therefore$ 正整数 $a$ 的最大值是 5.

ii)当 $g'(x)\leqslant 0$ 恒成立时， $g'(x)=(x+1)\mathrm{e}^x-2(1+\ln x)-x+4-a\leqslant 0$ ，

即 $a-2\geqslant[(x+1)\mathrm{e}^x-2\ln x-x]_{\max}$，

又由（i）知， 函数 $h(x)$在区间 $(x_0,+\infty)$上单调递增，

$\therefore$ 函数 $h(x)$不存在最大值.

综上：正整数 $a$ 的最大值是 5. ……………………………………………12 分

22．**解**：（1）曲线 $C_1$ 的极坐标方程为 $\rho=2(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$． ……………………………2 分

设 $P(\rho,\ \theta)$ 为曲线 $C_2$ 上的任意一点，

∴ $\rho=2\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)$．

∴曲线 $C_2$ 极坐标方程为 $\rho=2\sin\theta(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$． ……………………………………5 分

（2）∵直线 $\theta=\alpha(0<\alpha<\pi,\ \rho\in\mathbf{R})$ 与曲线 $C_1$，$C_2$ 分别交于点 $A$，$B$(异于极点)，

∴设 $B(\rho_B,\ \alpha)$，则 $A(\rho_A,\ \alpha)$．

由题意得 $\rho_B=2\sin\alpha$，$\rho_A=2$，

∴ $AB=\rho_A-\rho_B=2-2\sin\alpha$． ……………………………………………………7 分

∵点 $M$ 到直线 $AB$ 的距离 $d=OM\times\sin\alpha=2\sin\alpha$，

∴ $S_{\Delta AOM}=\frac{1}{2}|AB|\cdot d=\frac{1}{2}(2-2\sin\alpha)\times 2\sin\alpha$

$$=2(1-\sin\alpha)\times\sin\alpha\leqslant 2\times\frac{(\sin\alpha+1-\sin\alpha)^2}{4}=\frac{1}{2}$$

(当且仅当 $\sin\alpha=\frac{1}{2}$ 时，等号成立)．

∴△$ABM$ 的面积的最大值为 $\frac{1}{2}$． ……………………………………………10 分

23．**解**：（1）由题意得 $f(x)=|x+m|-|x-2m|\leqslant|(x+m)-(x-2m)|=|3m|$． ………3 分

∵函数 $f(x)$ 的最大值为 6，

∴ $|3m|=6$，即 $m=\pm 2$．

∵ $m>0$，∴ $m=2$． …………………………………………………………………5 分

（2）由（1）知，$x+y+z=2$，∵ $x>0$，$y>0$，$z>0$，

∴ $2=x+y+z=(\frac{x}{2}+y)+(\frac{x}{2}+z)$

$\geqslant 2\sqrt{\frac{xy}{2}}+2\sqrt{\frac{xz}{2}}$ (当且仅当 $\frac{x}{2}=y=z$ 时，等号成立)． …………………………8 分

∴ $\sqrt{2}\sqrt{xy}+\sqrt{2}\sqrt{xz}\leqslant 2$，

∴ $\sqrt{xy}+\sqrt{xz}\leqslant\sqrt{2}$ (当且仅当 $x=1,\ y=z=\frac{1}{2}$ 时，等号成立)． ………………10 分