绵阳市高中 2019 级第一次诊断性考试

文科数学参考答案及评分意见

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分.

CDADC　ACBBA　BC

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13．7　　14．2　　15．$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　16．[1，$2\sqrt{2}$]

三、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分.

17．解：（1）由题意得 A=2，$\dfrac{2\pi}{\omega}=\dfrac{\pi}{2}$，

∴ $\omega=4$. ……………………………………………………2 分

∵函数 $f(x)$ 的图象经过点 $M(-\dfrac{7\pi}{24},-2)$，

∴ $2\cos(-\dfrac{7\pi}{6}+\varphi)=-2$.

又$|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}$，∴ $\varphi=\dfrac{\pi}{6}$. ……………………………………………5 分

∴ $f(x)=2\cos(4x+\dfrac{\pi}{6})$. ……………………………………………6 分

由 $-\pi+2k\pi\leqslant 4x+\dfrac{\pi}{6}\leqslant 2k\pi$，

得 $-\dfrac{7\pi}{24}+\dfrac{k\pi}{2}\leqslant x\leqslant\dfrac{k\pi}{2}-\dfrac{\pi}{24}(k\in\mathrm{Z})$.

∴函数 $f(x)$ 的单调递增区间为$[-\dfrac{7\pi}{24}+\dfrac{k\pi}{2}$，$\dfrac{k\pi}{2}-\dfrac{\pi}{24}](k\in Z)$. ……………8 分

（2）∵ $x\in[-\dfrac{\pi}{8},\dfrac{\pi}{8}]$，

∴ $4x+\dfrac{\pi}{6}\in[-\dfrac{\pi}{3},\dfrac{2\pi}{3}]$，

∴ $\cos(4x+\dfrac{\pi}{6})\in[-\dfrac{1}{2},1]$，

∴函数 $f(x)$ 的值域为[−1，2]. ……………………………………12 分

18．**解**：（1）当 n=1 时，$S_1=2a_1-2=a_1$，

解得 $a_1=2$． ……………………………………………………………… 2 分

∵ $S_n=2a_n-2$，①

∴当 $n\geqslant 2$时，$S_{n-1}=2a_{n-1}-2$．②

①－②得 $a_n=2a_{n-1}$，

整理得 $a_n=2a_{n-1}(n\geqslant 2)$．

∴数列$\{a_n\}$是以首项为 2，公比为 2 的等比数列． ……………………………5 分

∴ $a_n=2^n$． ………………………………………………………………6 分

（2）由（1）得 $a_na_{n+1}=2\times 4^n$． …………………………………………7 分

∴ $T_n=a_1a_2-a_2a_3+\mathrm{L}\ +(-1)^{n+1}a_na_{n+1}$

$=2(4-4^2+\mathrm{L}\ +(-1)^{n+1}\times 4^n)=\dfrac{8}{5}[1-(-4)^n]$． ……………………………12 分

19．**解**：选择条件①：由 $b\tan C=(2a-b)\tan B$，得 $\dfrac{b\sin C}{\cos C}=\dfrac{(2a-b)\sin B}{\cos B}$，

由正弦定理可得，$\sin B\sin C\cos B=(2\sin A-\sin B)\sin B\cos C$．

∴ $\sin C\cos B=2\sin A\cos C-\sin B\cos C$，

∴ $2\sin A\cos C=\sin C\cos B+\sin B\cos C=\sin(C+B)=\sin A$，

∵ $A\in(0,\ \pi)$，∴ $\sin A\neq 0$，

∴ $\cos C=\dfrac{1}{2}$，又 $C\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，∴ $C=\dfrac{\pi}{3}$．

选择条件②：由正弦定理可得，$2\sin C\cos B=2\sin A-\sin B$，

又 $\sin A=\sin(C+B)$，

∴ $2\sin C\cos B=2\sin(C+B)-\sin B=2(\sin C\cos B+\cos C\sin B)-\sin B$，

化简整理得 $2\cos C\ \sin B=\ \sin B$，由 $\sin B>0$，故 $\cos C=\dfrac{1}{2}$，

又 $0<C<\dfrac{\pi}{2}$，∴ $C=\dfrac{\pi}{3}$．

选择条件③：由已知得，$b^2+a^2-c^2=ac\cos A+a^2\cos C$，

由余弦定理，得 $b^2+a^2-c^2=2ab\cos C$，

∵ $b^2+c^2-a^2=ac\cos C+c^2\cos A$，

∴ $2ab\cos C=ac\cos A+a^2\cos C$，

∵ $a>0$，∴ $2b\cos C=c\cos A+a\cos C$，

由正弦定理，有 $2\sin B\cos C=\sin C\cos A+\sin A\cos C=\sin(A+C)=\sin B$，

∵ $\sin B\neq 0$，∴ $\cos C=\frac{1}{2}$.

又 $C\in(0,\frac{\pi}{2})$，∴ $C=\frac{\pi}{3}$. ……………………………………………………6 分

（2）∵ $a=mb$，

∴ $m=\frac{a}{b}=\frac{\sin A}{\sin B}=\frac{\sin(B+\frac{\pi}{3})}{\sin B}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2\tan B}$. ……………………………………………8 分

∵△ABC 为锐角三角形，则 $B\in(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2})$，

∴ $\tan B>\frac{\sqrt{3}}{3}$. ………………………………………………………………10 分

∴ $\frac{1}{2}<m<2$. ………………………………………………………………12 分

20．解：（1）由题意得 $f'(x)=-x^2+2ax+3a^2=-(x-3a)(x+a)$. …………………1 分

当 $a=-1$ 时，$f'(x)=-(x-1)(x+3)$，$x\in[-4，2]$.

由 $f'(x)>0$，解得 $-3<x<1$；

由 $f'(x)<0$，解得 $-4\leqslant x<-3$ 或 $1<x\leqslant 2$. ……………………………………3 分

∴函数 $f(x)$在区间$(-3，1)$上单调递增，在区间$[-4，-3)$，$(1，2]$单调递减.

又 $f(-4)=-\frac{25}{3}$，$f(-3)=-\frac{32}{3}$，$f(1)=0$，$f(2)=-\frac{7}{3}$，

∴函数 $f(x)$ 在区间$[-4，2]$上的最大值为 0，最小值为$-\frac{32}{3}$. ……………6 分

（2）函数 $f(x)$只有一个零点.

∵ $f'(x)=-x^2+2ax+3a^2=-(x-3a)(x+a)$，

i)当 $a<0$ 时，由 $f'(x)>0$，解得 $3a<x<-a$，

∴函数 $f(x)$在区间$(3a，-a)$上单调递增；

由 $f'(x)<0$，解得 $x<3a$ 或 $x>-a$，

∴函数 $f(x)$在区间$(-\infty，3a)$，$(-a，+\infty)$上单调递减.

又 $f(0)=-\dfrac{5}{3}<0$，

∴只需要 $f(-a)<0$，解得$-1<a<0$.

∴实数 a 的取值范围为 $-1<a<0$.

ii)当 $a=0$ 时，显然 $f(x)$只有一个零点成立. ……………………………10 分

iii) 当 $a>0$ 时，由 $f'(x)>0$，解得 $-a<x<3a$，

即 $f(x)$在区间$(-a，3a)$上单调递增；

由 $f'(x)<0$，解得 $x<-a$ 或 $x>3a$，

即函数 $f(x)$在区间$(-\infty，-a)$，$(3a，+\infty)$上单调递减；

又 $f(0)=-\dfrac{5}{3}<0$，∴只需要 $f(3a)<0$，解得 $0<a<\dfrac{\sqrt[3]{5}}{3}$.

综上：实数 a 的取值范围是 $(-1,\dfrac{\sqrt[3]{5}}{3})$. ……………………………………12 分

21．**解**：（1）由题意得 $f'(x)=(x-1)e^x+2ax-b$. …………………………………2 分

∵函数 $f(x)$的图象在点$(0，f(0))$处的切线的斜率为-3，

∴ $f'(0)=-b-1=-3$，

解得 $b=2$. ………………………………………………………………………………4 分

（2）∵ $f(x)>-e-1$ 恒成立，∴$f(1)=-e+a-2>-e-1$，即 $a>1$.

∴$f(x)\geqslant(x-2)e^x+x^2-2x$(当 $x=0$ 时，取“=”). ……………………………6 分

令 $g(x)=(x-2)e^x+x^2-2x$，

则 $g'(x)=(x-1)e^x+2(x-1)=(x-1)(e^x+2)$.

由 $g'(x)>0$，得 $x>1$，由 $g'(x)<0$，得 $x<1$.

∴函数 $g(x)$在区间$(-\infty，1)$上单调递减，

在区间$(1，+\infty)$上单调递增. ……………………………………………8 分

∴ $g(x)_{\min}=g(1)=-e-1$，

∴$g(x)\geqslant-e-1$(当 $x=1$ 时，取“=”).

∴$f(x)>-e-1$.

综上，实数 a 的取值范围为 $a>1$. ……………………………………………12 分

22．解：（1）曲线 C_1 的极坐标方程为 $\rho=2(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$． …………………………2 分

设 $P(\rho,\ \theta)$为曲线 C_2 上的任意一点，可得 $\rho=2\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)$．

∴曲线 C_2 极坐标方程为 $\rho=2\sin\theta(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$． ………………………………5 分

（2）∵直线 $\theta=\alpha(0<\alpha<\pi,\ \rho\in\mathbf{R})$与曲线 C_1，C_2 分别相交于点 A，B，

∴设 $B(\rho_B,\ \alpha)$，则 $A(\rho_A,\ \alpha)$．

由题意得 $\rho_B=2\sin\alpha$，$\rho_A=2$，

∴ $AB=\rho_A-\rho_B=2-2\sin\alpha$． ………………………………………………7 分

∵点 M 到直线 AB 的距离 $d=OM\times\sin\alpha=2\sin\alpha$，

∴ $S_{\Delta AOM}=\frac{1}{2}|AB|\cdot d=\frac{1}{2}(2-2\sin\alpha)\times2\sin\alpha$

$=2(1-\sin\alpha)\times\sin\alpha\leqslant2\times\frac{(\sin\alpha+1-\sin\alpha)^2}{4}=\frac{1}{2}$

(当且仅当 $\sin\alpha=\frac{1}{2}$ 时，等号成立)．

∴△ABM 的面积的最大值为 $\frac{1}{2}$． ………………………………………10 分

23．解：（1）由题意得 $f(x)=|x+m|-|x-2m|\leqslant|(x+m)-(x-2m)|=|3m|$． ………3 分

∵函数 $f(x)$ 的最大值为 6，

∴ $|3m|=6$，即 $m=\pm2$．

∵$m>0$，∴$m=2$． ……………………………………………………5 分

（2）由（1）知，$x+y+z=2$，

∵$x>0$，$y>0$，$z>0$，

∴ $2=x+y+z=(\frac{x}{2}+y)+(\frac{x}{2}+z)$

$\geqslant2\sqrt{\frac{xy}{2}}+2\sqrt{\frac{xz}{2}}$ (当且仅当 $\frac{x}{2}=y=z$ 时，等号成立)． …………………………8 分

∴ $\sqrt{2}\sqrt{xy}+\sqrt{2}\sqrt{xz}\leqslant2$，

∴ $\sqrt{xy}+\sqrt{xz}\leqslant\sqrt{2}$ (当且仅当 $x=1$，$y=z=\frac{1}{2}$ 时，等号成立)． ………………10 分