

工作秘密 严禁外传
擅自泄露 严肃追责

成都市 2019 级高中毕业班摸底测试

数 学(理科)

本试卷分选择题和非选择题两部分。第 I 卷(选择题)1 至 2 页,第 II 卷(非选择题)3 至 4 页,共 4 页,满分 150 分,考试时间 120 分钟。

注意事项:

1. 答题前,务必将自己的姓名、考籍号填写在答题卡规定的位置上。
2. 答选择题时,必须使用 2B 铅笔将答题卡上对应题目的答案标号涂黑,如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其它答案标号。
3. 答非选择题时,必须使用 0.5 毫米黑色签字笔,将答案书写在答题卡规定的位置上。
4. 所有题目必须在答题卡上作答,在试题卷上答题无效。
5. 考试结束后,只将答题卡交回。

第 I 卷(选择题,共 60 分)

一、选择题:本大题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 设全集 $U = \{x \in \mathbf{N}^* | x < 9\}$, 集合 $A = \{3, 4, 5, 6\}$, 则 $\complement_U A =$
(A) $\{1, 2, 3, 8\}$ (B) $\{1, 2, 7, 8\}$ (C) $\{0, 1, 2, 7\}$ (D) $\{0, 1, 2, 7, 8\}$
2. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \log_2(2-x), & x < 1, \\ e^x, & x \geq 1. \end{cases}$ 则 $f(-2) + f(\ln 4) =$
(A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 8
3. 某校为增强学生垃圾分类的意识,举行了一场垃圾分类知识问答测试,满分为 100 分。如图所示的茎叶图为某班 20 名同学的测试成绩(单位:分)。则这组数据的极差和众数分别是
(A) 20, 88 (B) 30, 88 (C) 20, 82 (D) 30, 91
4. 若实数 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} 2x - y \geq 0, \\ x + y - 4 \leq 0, \\ y \geq 0. \end{cases}$ 则 $z = x - 2y$ 的最大值为
(A) -4 (B) 0 (C) 2 (D) 4

茎	叶
6	8
7	2 3 3 6
8	1 2 2 8 8 8 9
9	0 1 1 3 5 7 7 8

5. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的一个焦点到其中一条渐近线的距离为 $2a$, 则该双曲线的渐近线方程为

(A) $y = \pm 2x$ (B) $y = \pm \frac{1}{2}x$
(C) $y = \pm x$ (D) $y = \pm \sqrt{2}x$

6. 记函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$, 若 $f(x) = e^x \sin 2x$, 则 $f'(0) =$

(A) 2 (B) 1 (C) 0 (D) -1

7. 已知 M 为圆 $(x-1)^2 + y^2 = 2$ 上一动点, 则点 M 到直线 $x - y + 3 = 0$ 的距离的最大值是

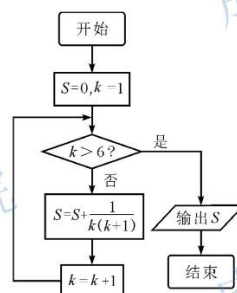
(A) $\sqrt{2}$ (B) $2\sqrt{2}$
(C) $3\sqrt{2}$ (D) $4\sqrt{2}$

8. 已知直线 $l_1: x + y + m = 0$, $l_2: x + m^2y = 0$, 则“ $l_1 \parallel l_2$ ”是“ $m = 1$ ”的

(A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件
(C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要条件

9. 执行如图所示的程序框图, 则输出的 S 的值是

(A) $\frac{4}{5}$ (B) $\frac{5}{6}$
(C) $\frac{6}{7}$ (D) $\frac{7}{8}$



10. 在三棱锥 $P-ABC$ 中, 已知 $PA \perp$ 平面 ABC , $PA = AB = BC = 2$, $AC = 2\sqrt{2}$. 若该三棱锥的顶点都在同一个球面上, 则该球的表面积为

(A) 4π (B) 10π (C) 12π (D) 48π

11. 已知函数 $f(x) = \frac{a}{x+1}$, $g(x) = \ln x$. 若对任意 $x_1, x_2 \in (0, 2]$, 且 $x_1 \neq x_2$, 都有

$\frac{g(\frac{x_2}{x_1}) - f(x_1) + f(x_2)}{x_2 - x_1} > -1$, 则实数 a 的取值范围是

(A) $(-\infty, \frac{27}{4}]$ (B) $(-\infty, 2]$ (C) $(-\infty, \frac{27}{2}]$ (D) $(-\infty, 8]$

12. 设抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点为 F , 准线为 l , 过抛物线上一点 A 作 l 的垂线, 垂足为 B , 设 $C(2p, 0)$, AF 与 BC 相交于点 D . 若 $|CF| = |AF|$, 且 $\triangle ACD$ 的面积为 $2\sqrt{2}$, 则点 F 到准线 l 的距离是

(A) $\sqrt{2}$ (B) $\sqrt{3}$ (C) $\frac{4\sqrt{2}}{3}$ (D) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

第Ⅱ卷(非选择题,共 90 分)

二、填空题:本大题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.把答案填在答题卡上.

13. 设复数 $z = \frac{1+2i}{i}$ (i 为虚数单位),则 $|z| =$ _____.

14. 一个路口的红绿灯,红灯的时间为 30 秒,黄灯的时间为 5 秒,绿灯的时间为 40 秒.当你到达该路口时,看见不是红灯的概率是_____.

15. 已知关于 x, y 的一组数据:

x	1	m	3	4	5
y	0.5	0.6	n	1.4	1.5

根据表中这五组数据得到的线性回归直线方程为 $\hat{y} = 0.28x + 0.16$,则 $n - 0.28m$ 的值为_____.

16. 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数,当 $x > 0$ 时, $f(x) = \begin{cases} 2^{|x-1|} - 1, & 0 < x \leq 2, \\ \frac{1}{2}f(x-2), & x > 2. \end{cases}$ 有下列

结论:

- ① 函数 $f(x)$ 在 $(-6, -5)$ 上单调递增;
- ② 函数 $f(x)$ 的图象与直线 $y = x$ 有且仅有 2 个不同的交点;
- ③ 若关于 x 的方程 $[f(x)]^2 - (a+1)f(x) + a = 0 (a \in \mathbf{R})$ 恰有 4 个不相等的实数根,则这 4 个实数根之和为 8;
- ④ 记函数 $f(x)$ 在 $[2k-1, 2k] (k \in \mathbf{N}^*)$ 上的最大值为 a_k ,则数列 $\{a_n\}$ 的前 7 项和为 $\frac{127}{64}$.

其中所有正确结论的编号是_____.

三、解答题:本大题共 6 小题,共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{a}{2}x^2 - 2x + \frac{5}{6}$,其中 $a \in \mathbf{R}$.若函数 $f(x)$ 的图象在点

$(1, f(1))$ 处的切线与直线 $2x + y - 1 = 0$ 平行.

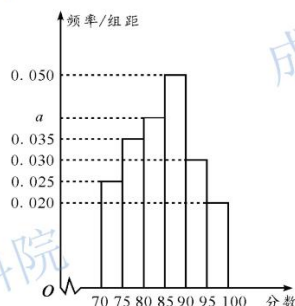
(I)求 a 的值;

(II)求函数 $f(x)$ 的极值.

18. (本小题满分 12 分)

“2021 年全国城市节约用水宣传周”已于 5 月 9 日至 15 日举行.成都市围绕“贯彻新发展理念,建设节水型城市”这一主题,开展了形式多样,内容丰富的活动,进一步增强全民保护水资源,防治水污染,节约用水的意识.为了解活动开展成效,某街道办事处工作人员赴一小区调

查住户的节约用水情况,随机抽取了 300 名业主进行节约用水调查评分,将得到的分数分成 6 组: $[70, 75)$, $[75, 80)$, $[80, 85)$, $[85, 90)$, $[90, 95)$, $[95, 100]$, 得到如图所示的频率分布直方图.

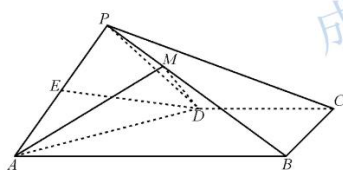


(I) 求 a 的值, 并估计这 300 名业主评分的中位数;

(II) 若先用分层抽样的方法从评分在 $[90, 95)$ 和 $[95, 100]$ 的业主中抽取 5 人, 然后再从抽出的这 5 位业主中任意选取 2 人作进一步访谈, 求这 2 人中至少有 1 人的评分在 $[95, 100]$ 的概率.

19. (本小题满分 12 分)

如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $DC \parallel AB$, $BC \perp AB$, E 为棱 AP 的中点, $AB = 4$, $PA = PD = DC = BC = 2$.



(I) 求证: $DE \parallel$ 平面 PBC ;

(II) 若平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$, M 是线段 BP 上的点, 且 $BM = 2MP$, 求二面角 $M-AD-B$ 的余弦值.

20. (本小题满分 12 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左, 右焦点分别为 F_1, F_2 , 点 P 在椭圆 C 上,

$|PF_1| = 2$, $\angle F_1PF_2 = \frac{\pi}{3}$, 且椭圆 C 的离心率为 $\frac{1}{2}$.

(I) 求椭圆 C 的方程;

(II) 设直线 $l: y = kx + m (m \neq 0)$ 与椭圆 C 相交于 A, B 两点, O 为坐标原点, 求 $\triangle OAB$ 面积的最大值.

21. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = 2ax - \ln x$, 其中 $a \in \mathbb{R}$.

(I) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性;

(II) 当 $a > 0$ 时, 若 $x_1, x_2 (0 < x_1 < x_2)$ 满足 $f(x_1) = f(x_2)$, 证明: $f(2ax_1) + f(2ax_2) > 4a^2(x_1 + x_2)$.

22. (本小题满分 10 分) 选修 4-4: 坐标系与参数方程

在直角坐标系 xOy 中, 曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = \cos \alpha \\ y = \sin \alpha \end{cases}$ (α 为参数). 以 O 为极点, x 轴

的正半轴为极轴建立极坐标系, 直线 l 的极坐标方程为 $\sqrt{3}\rho \cos \theta - \rho \sin \theta + \sqrt{3} = 0$.

(I) 求曲线 C 的普通方程和直线 l 的直角坐标方程;

(II) 在曲线 C 上任取一点 (x, y) , 保持纵坐标 y 不变, 将横坐标 x 伸长为原来的 $\sqrt{3}$ 倍得到曲线 C_1 . 设直线 l 与曲线 C_1 相交于 M, N 两点, 点 $P(-1, 0)$, 求 $|PM| + |PN|$ 的值.

成都市 2019 级高中毕业班摸底测试

数学(理科)参考答案及评分意见

第 I 卷(选择题,共 60 分)

一、选择题:(每小题 5 分,共 60 分)

1. B; 2. C; 3. B; 4. D; 5. A; 6. A; 7. C; 8. B; 9. C; 10. C; 11. A; 12. D.

第 II 卷(非选择题,共 90 分)

二、填空题:(每小题 5 分,共 20 分)

13. $\sqrt{5}$; 14. $\frac{3}{5}$; 15. 0.44; 16. ①④.

三、解答题:(共 70 分)

17. 解:(I)由已知,可得 $f'(x) = x^2 + ax - 2$1 分

$\because$ 函数 $f(x)$ 的图象在点 $(1, f(1))$ 处的切线与直线 $2x + y - 1 = 0$ 平行,

$\therefore f'(1) = a - 1 = -2$3 分

$\therefore a = -1$4 分

经验证, $a = -1$ 符合题意.4 分

(II)由(I)得 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{5}{6}$5 分

$\therefore f'(x) = x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2)$5 分

当 x 变化时, $f'(x)$ 与 $f(x)$ 的变化情况如下表:

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 2)$	2	$(2, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	单调递增 ↗	极大值 2	单调递减 ↘	极小值 $-\frac{5}{2}$	单调递增 ↗

.....10 分

$\therefore$ 当 $x = -1$ 时, $f(x)$ 取得极大值 2; 当 $x = 2$ 时, $f(x)$ 取得极小值 $-\frac{5}{2}$12 分

18. 解:(I) $\because$ 第三组的频率为 $1 - (0.020 + 0.025 + 0.030 + 0.035 + 0.050) \times 5 = 0.200$,2 分

$\therefore a = \frac{0.200}{5} = 0.040$3 分

又第一组的频率为 $0.025 \times 5 = 0.125$, 第二组的频率为 $0.035 \times 5 = 0.175$,
第三组的频率为 0.200.

$\therefore$ 前三组的频率之和为 $0.125 + 0.175 + 0.200 = 0.500$,4 分

$\therefore$ 这 300 名业主评分的中位数为 85.5 分

(II)由频率分布直方图,知评分在 $[90, 95)$ 的人数与评分在 $[95, 100]$ 的人数的比值为 3 : 2.

$\therefore$ 采用分层抽样法抽取 5 人, 评分在 $[90, 95)$ 的有 3 人, 评分在 $[95, 100]$ 有 2 人.7 分

不妨设评分在 $[90, 95)$ 的 3 人分别为 A_1, A_2, A_3 ; 评分在 $[95, 100]$ 的 2 人分别为 B_1, B_2 .

则从 5 人中任选 2 人的所有可能情况有：

$\{A_1, A_2\}, \{A_1, A_3\}, \{A_1, B_1\}, \{A_1, B_2\}, \{A_2, A_3\}, \{A_2, B_1\}, \{A_2, B_2\}, \{A_3, B_1\}, \{A_3, B_2\}, \{B_1, B_2\}$. 共 10 种.10 分

其中选取的 2 人中至少有 1 人的评分在 $[95, 100]$ 的情况有：

$\{A_1, B_1\}, \{A_1, B_2\}, \{A_2, B_1\}, \{A_2, B_2\}, \{A_3, B_1\}, \{A_3, B_2\}, \{B_1, B_2\}$. 共 7 种.11 分

故这 2 人中至少有 1 人的评分在 $[95, 100]$ 的概率为

$$P = \frac{7}{10}. \quad \text{.....12 分}$$

19. 解：(I) 如图，取 PB 中点 H ，连接 EH, HC .

在 $\triangle PAB$ 中， $\because E$ 为 AP 的中点， H 为 PB 的中点，

$\therefore EH$ 为 $\triangle PAB$ 的中位线.

$$\therefore EH \parallel AB, EH = \frac{1}{2}AB. \quad \text{.....1 分}$$

$$\text{又 } DC \parallel AB, DC = \frac{1}{2}AB,$$

$$\therefore EH \parallel DC \text{ 且 } EH = DC.$$

$$\therefore \text{四边形 } CDEH \text{ 为平行四边形. } \therefore DE \parallel CH. \quad \text{.....3 分}$$

$$\text{又 } DE \not\subset \text{平面 } PBC, CH \subset \text{平面 } PBC, \quad \text{.....4 分}$$

$$\therefore DE \parallel \text{平面 } PBC. \quad \text{.....5 分}$$

(II) 如图，连接 BD . $\because DC \parallel AB, BC \perp AB, \therefore BC \perp DC$.

在 $\text{Rt}\triangle BCD$ 中， $\because DC = BC = 2$,

$$\therefore BD = \sqrt{DC^2 + BC^2} = 2\sqrt{2}.$$

在直角梯形 $ABCD$ 中，易得 $AD = 2\sqrt{2}$.

在 $\triangle ABD$ 中， $\because AD = 2\sqrt{2}, AB = 4$,

$$\therefore AD^2 + BD^2 = AB^2. \therefore BD \perp AD.$$

取 AD 中点 O ，连接 PO .

$\because PA = PD, \therefore PO \perp AD$.

$\because$ 平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$,

平面 $PAD \cap$ 平面 $ABCD = AD, PO \subset$ 平面 PAD ,

$\therefore PO \perp$ 平面 $ABCD$.

取 AB 中点 N . $\therefore ON \parallel BD, ON \perp AD$. 则 PO, AD, ON 两两垂直.

以 O 为坐标原点，向量 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{ON}, \overrightarrow{OP}$ 的方向分别为 x 轴， y 轴， z 轴的正方向，建立如图所示的空间直角坐标系 $Oxyz$7 分

则 $A(\sqrt{2}, 0, 0), D(-\sqrt{2}, 0, 0), B(-\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 0), P(0, 0, \sqrt{2}), M(-\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{2\sqrt{2}}{3}, \frac{2\sqrt{2}}{3})$;

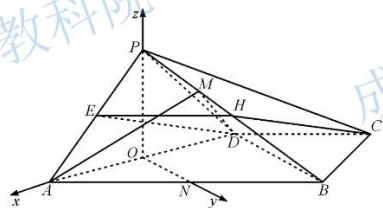
$$\overrightarrow{AM} = (-\frac{4\sqrt{2}}{3}, \frac{2\sqrt{2}}{3}, \frac{2\sqrt{2}}{3}), \overrightarrow{DM} = (\frac{2\sqrt{2}}{3}, \frac{2\sqrt{2}}{3}, \frac{2\sqrt{2}}{3}).$$

设平面 ADM 的一个法向量 $m = (x, y, z)$.

$$\text{由 } \begin{cases} \overrightarrow{AM} \cdot m = 0, \\ \overrightarrow{DM} \cdot m = 0 \end{cases} \text{ 得 } \begin{cases} -2x + y + z = 0, \\ x + y + z = 0. \end{cases} \text{ 化简得 } \begin{cases} x = 0, \\ y = -z. \end{cases}$$

令 $z = 1$, 得 $m = (0, -1, 1)$9 分

又平面 ABD 的一个法向量 $n = (0, 0, 1)$10 分



$$\therefore \cos \langle m, n \rangle = \frac{m \cdot n}{|m| \cdot |n|} = \frac{1}{\sqrt{2} \times 1} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cdots \cdots 11 \text{ 分}$$

$$\therefore \text{二面角 } M-AD-B \text{ 的余弦值为 } \frac{\sqrt{2}}{2}. \quad \cdots \cdots 12 \text{ 分}$$

20. 解: (I) $\because P$ 在椭圆 C 上, $|PF_1| = 2, \therefore |PF_2| = 2a - 2$.

在 $\triangle PF_1F_2$ 中, 由余弦定理得 $4c^2 = |PF_1|^2 + |PF_2|^2 - 2|PF_1||PF_2|\cos \angle F_1PF_2$,

$$\text{即 } 4c^2 = 4 + (2a - 2)^2 - 4(2a - 2)\cos \frac{\pi}{3}.$$

$$\text{化简, 得 } c^2 = a^2 - 3a + 3, \cdots \cdots ①$$

$$\text{又椭圆 } C \text{ 的离心率 } e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}, \therefore a = 2c, \cdots \cdots ② \quad \cdots \cdots 2 \text{ 分}$$

$$\text{由 } ①②, \text{ 解得 } c = 1, a = 2. \quad \cdots \cdots 3 \text{ 分}$$

$$\therefore b^2 = a^2 - c^2 = 3. \quad \cdots \cdots 4 \text{ 分}$$

$$\therefore \text{椭圆 } C \text{ 的方程为 } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1. \quad \cdots \cdots 5 \text{ 分}$$

(II) 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$.

$$\begin{cases} y = kx + m, \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases} \text{ 消去 } y, \text{ 得 } (4k^2 + 3)x^2 + 8kmx + 4m^2 - 12 = 0. \quad \cdots \cdots 6 \text{ 分}$$

$$\text{由 } \Delta = 16(12k^2 - 3m^2 + 9) > 0, \therefore 4k^2 + 3 > m^2.$$

$$\text{则 } x_1 + x_2 = \frac{-8km}{4k^2 + 3}, x_1 x_2 = \frac{4m^2 - 12}{4k^2 + 3}. \quad \cdots \cdots 7 \text{ 分}$$

$$\therefore |AB| = \sqrt{1 + k^2} \cdot \frac{4\sqrt{12k^2 - 3m^2 + 9}}{4k^2 + 3}. \quad \cdots \cdots 8 \text{ 分}$$

$$\therefore \text{坐标原点 } O \text{ 到直线 } l \text{ 的距离 } d = \frac{|m|}{\sqrt{1 + k^2}}, \quad \cdots \cdots 9 \text{ 分}$$

$$\therefore S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2} \cdot \frac{|m|}{\sqrt{1 + k^2}} \cdot \sqrt{1 + k^2} \cdot \frac{4\sqrt{12k^2 - 3m^2 + 9}}{4k^2 + 3}$$

$$= 2\sqrt{3} \cdot \frac{|m|\sqrt{4k^2 + 3 - m^2}}{4k^2 + 3} = 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{(4k^2 + 3 - m^2) \cdot m^2}}{4k^2 + 3}$$

$$\leq 2\sqrt{3} \cdot \frac{2}{4k^2 + 3} = \sqrt{3}. \quad \cdots \cdots 10 \text{ 分}$$

$$\text{当且仅当 } 4k^2 + 3 - m^2 = m^2, \text{ 即 } 4k^2 + 3 = 2m^2 \text{ 时, 等号成立.} \quad \cdots \cdots 11 \text{ 分}$$

$$\text{满足 } 4k^2 + 3 = 2m^2 > m^2. \quad \cdots \cdots 12 \text{ 分}$$

$$\therefore \triangle OAB \text{ 面积的最大值为 } \sqrt{3}. \quad \cdots \cdots 12 \text{ 分}$$

21. 解: (I) 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, $f'(x) = \frac{2ax - 1}{x}$.

① 当 $a \leq 0$ 时, 则当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $f'(x) \leq 0$ 恒成立. $\cdots \cdots 1 \text{ 分}$

$\therefore f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 无单调递增区间; $\cdots \cdots 2 \text{ 分}$

② 当 $a > 0$ 时, 则由 $f'(x) = 0$ 得 $x = \frac{1}{2a}$.

$\therefore$ 当 $x \in (0, \frac{1}{2a})$ 时, $f'(x) < 0$; 当 $x \in (\frac{1}{2a}, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$.

$\therefore f(x)$ 在 $(0, \frac{1}{2a})$ 上单调递减, 在 $(\frac{1}{2a}, +\infty)$ 上单调递增. $\cdots \cdots 3 \text{ 分}$

综上所述, 当 $a \leq 0$ 时, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 无单调递增区间;

当 $a > 0$ 时, $f(x)$ 在 $(0, \frac{1}{2a})$ 上单调递减, 在 $(\frac{1}{2a}, +\infty)$ 上单调递增.

……4 分

(II) $f(x) = 2ax - \ln x, x > 0$.

$\because x_1, x_2 (0 < x_1 < x_2)$ 满足 $f(x_1) = f(x_2)$,

$\therefore 2ax_1 - \ln x_1 = 2ax_2 - \ln x_2$, 即 $\frac{\ln x_1 - \ln x_2}{x_1 - x_2} = 2a$.

……5 分

欲证 $f(2ax_1) + f(2ax_2) > 4a^2(x_1 + x_2)$, 即证 $\ln(2ax_1) + \ln(2ax_2) < 0$,

即证 $x_1 x_2 < \frac{1}{4a^2}$, 又 $a > 0, 0 < x_1 < x_2$, 即证 $\sqrt{x_1 x_2} < \frac{1}{2a}$.

亦证 $\sqrt{x_1 x_2} < \frac{x_1 - x_2}{\ln x_1 - \ln x_2}$, 即 $\ln \frac{x_1}{x_2} - \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{x_1 x_2}} > 0$,

即证 $2\ln \sqrt{\frac{x_1}{x_2}} + \sqrt{\frac{x_2}{x_1}} - \sqrt{\frac{x_1}{x_2}} > 0$.

……7 分

$\because 0 < x_1 < x_2$, 设 $\sqrt{\frac{x_1}{x_2}} = t (0 < t < 1)$, 即证 $2\ln t + \frac{1}{t} - t > 0$.

……8 分

设 $h(t) = 2\ln t + \frac{1}{t} - t (0 < t < 1)$.

$\because h'(t) = \frac{2}{t} - \frac{1}{t^2} - 1 = \frac{-(t-1)^2}{t^2} < 0$ 在 $t \in (0, 1)$ 上恒成立,

……9 分

$\therefore h(t)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减, $\therefore h(t) > h(1) = 0$.

……10 分

$\therefore 2\ln t + \frac{1}{t} - t > 0$.

……11 分

即 $f(2ax_1) + f(2ax_2) > 4a^2(x_1 + x_2)$ 成立.

……12 分

22. 解: (I) 由曲线 C 的参数方程, 消去参数 α , 得曲线 C 的普通方程为 $x^2 + y^2 = 1$.

……2 分

$\because \rho \cos \theta = x, \rho \sin \theta = y, \therefore$ 直线 l 的直角坐标方程为

$\sqrt{3}x - y + \sqrt{3} = 0$.

……4 分

(II) 设曲线 C 上任一点 (x, y) 经坐标变换后对应的点为 (x', y') .

据题意, 得 $\begin{cases} x' = \sqrt{3}x, \\ y' = y. \end{cases}$ 即 $\begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}}{3}x', \\ y = y'. \end{cases}$

$\therefore x^2 + y^2 = 1, \therefore \frac{x'^2}{3} + y'^2 = 1$.

即曲线 C_1 的普通方程为 $\frac{x'^2}{3} + y'^2 = 1$.

……6 分

$\because$ 直线 l 过定点 $P(-1, 0)$,

$\therefore$ 直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x = -1 + \frac{1}{2}t, \\ y = \frac{\sqrt{3}}{2}t \end{cases} (t \text{ 为参数}).$

……7 分

将直线 l 的参数方程代入曲线 C_1 的普通方程, 整理可得

$5t^2 - 2t - 4 = 0. \dots (*)$

$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 5 \times (-4) = 84 > 0$.

设 t_1, t_2 为方程 $(*)$ 的两个实数根. 则 $t_1 + t_2 = \frac{2}{5}, t_1 t_2 = -\frac{4}{5} < 0$.

……8 分

$\therefore |PM| + |PN| = |t_1| + |t_2| = |t_1 - t_2| = \sqrt{(t_1 + t_2)^2 - 4t_1 t_2} = \frac{2\sqrt{21}}{5}$.

……10 分