

成都市 2018 级高中毕业班第一次诊断性检测

数学(理科)参考答案及评分意见

第 I 卷 (选择题, 共 60 分)

一、选择题:(每小题 5 分, 共 60 分)

1. B; 2. D; 3. A; 4. B; 5. A; 6. B; 7. C; 8. C; 9. D; 10. A; 11. D; 12. C.

第 II 卷 (非选择题, 共 90 分)

二、填空题:(每小题 5 分, 共 20 分)

13. -35 ; 14. -5 ; 15. 65 ; 16. $\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{2\sqrt{6}}{3}$ (第一空 2 分, 第二空 3 分).

三、解答题:(共 70 分)

17. 解:(I) $\because \tan \angle BMC = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \therefore \tan \angle BMA = \frac{\sqrt{3}}{2}$1 分

$\because \tan A = \tan(\pi - \angle ABM - \angle BMA) = -\tan(\angle ABM + \angle BMA),$ 2 分

$\therefore \tan A = -\frac{\tan \angle ABM + \tan \angle BMA}{1 - \tan \angle ABM \cdot \tan \angle BMA} = -\frac{\frac{\sqrt{3}}{5} + \frac{\sqrt{3}}{2}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{5} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = -\sqrt{3}$4 分

$\because 0 < A < \pi, \therefore A = \frac{2\pi}{3}$5 分

(II) $\because \tan \angle BMA = \frac{\sqrt{3}}{2}, \tan \angle ABM = \frac{\sqrt{3}}{5}, \therefore \sin \angle BMA = \frac{\sqrt{21}}{7}, \sin \angle ABM = \frac{\sqrt{21}}{14}$.

在 $\triangle ABM$ 中, 由正弦定理, 得 $\frac{AB}{\sin \angle BMA} = \frac{BM}{\sin A}$.

$\therefore AB = \frac{BM \cdot \sin \angle BMA}{\sin A} = \frac{\sqrt{21} \times \frac{\sqrt{21}}{7}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2\sqrt{3}$8 分

$\therefore \triangle ABM$ 的面积 $S_{\triangle ABM} = \frac{1}{2} \cdot BM \cdot AB \cdot \sin \angle ABM = \frac{1}{2} \times \sqrt{21} \times 2\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{21}}{14} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$10 分

$\because$ 点 M 在边 AC 上, $CM = 3MA$,

$\therefore \triangle ABC$ 的面积 $S_{\triangle ABC} = 4S_{\triangle ABM} = 6\sqrt{3}$12 分

18. 解:(I) 由题中 2×2 列联表, 可得 $K^2 = \frac{100(10 \times 30 - 20 \times 40)^2}{50 \times 50 \times 30 \times 70} \approx 4.762 > 3.841$.

.....3 分

$\therefore$ 有 95% 的把握认为“网红乡土直播员”与性别有关系.4 分

(II) 在“网红乡土直播员”中按分层抽样的方法抽取 6 人, 男性人数为 $6 \times \frac{10}{30} = 2$ 人;

女性人数为 $6 \times \frac{20}{30} = 4$ 人.6 分

由题, 随机变量 ξ 所有可能的取值为 0, 1, 2.

$$P(\xi=0) = \frac{C_2^0 C_4^2}{C_6^2} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}, P(\xi=1) = \frac{C_2^1 C_4^1}{C_6^2} = \frac{8}{15}, P(\xi=2) = \frac{C_2^2 C_4^0}{C_6^2} = \frac{1}{15}.$$

.....9 分

$\therefore \xi$ 的分布列为

ξ	0	1	2
P	$\frac{2}{5}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{15}$

.....10 分

$$\therefore \xi \text{ 的数学期望 } E(\xi) = 0 \times \frac{2}{5} + 1 \times \frac{8}{15} + 2 \times \frac{1}{15} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}.$$

.....12 分

19. 解: (I) 在长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 四边形 BCC_1B_1 是矩形.

连接 ME . $\because E, M$ 分别为棱 CC_1, BB_1 的中点, 且 $BB_1 = 4, B_1C_1 = 2$,

$\therefore$ 四边形 MEC_1B_1 是正方形.

$\therefore C_1M \perp B_1E$.

.....2 分

$\because N, M$ 分别为棱 AA_1, BB_1 的中点,

$\therefore NM \perp$ 平面 BCC_1B_1 .

又 $B_1E \subset$ 平面 BCC_1B_1 , $\therefore NM \perp B_1E$.

.....4 分

$\because NM \cap C_1M = M, NM, C_1M \subset$ 平面 NMC_1 , $\therefore B_1E \perp$ 平面 C_1MN .

$\because B_1E \subset$ 平面 B_1D_1E , $\therefore$ 平面 $B_1D_1E \perp$ 平面 C_1MN .

.....5 分

(II) 易知直线 $AF \parallel$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$, $AF \subset$ 平面 AFM .

$\because$ 平面 $AFM \cap$ 平面 $A_1B_1C_1D_1 = l$,

$\therefore AF \parallel l$.

$\therefore$ 直线 l 与平面 B_1D_1E 所成的角, 即直线 AF 与平面 B_1D_1E 所成的角.7 分

以 D 为坐标原点, $\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DD_1}$ 的方向分别为 x 轴, y 轴, z 轴的正方向, 建立如图所示的空间直角坐标系 $Dxyz$.

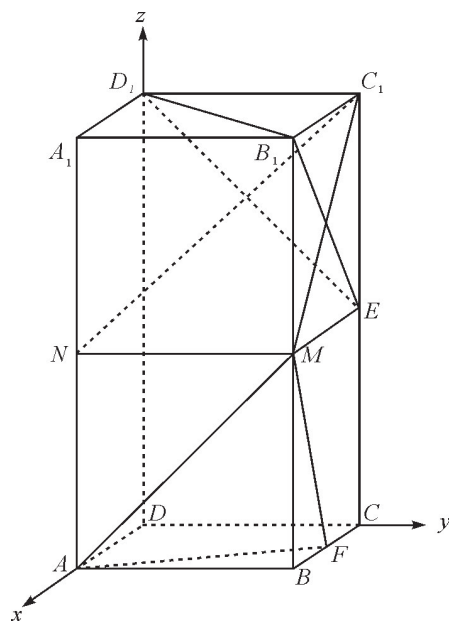
则 $D(0,0,0), A(2,0,0), F(1,2,0), D_1(0,0,4),$

$B_1(2,2,4), E(0,2,2)$.

$$\therefore \overrightarrow{D_1B_1} = (2,2,0), \overrightarrow{D_1E} = (0,2,-2), \overrightarrow{AF} = (-1,2,0)$$

.....8 分

设平面 B_1D_1E 的一个法向量 $\mathbf{m} = (x, y, z)$.



$$\text{由 } \begin{cases} \vec{m} \cdot \overrightarrow{D_1 B_1} = 0 \\ \vec{m} \cdot \overrightarrow{D_1 E} = 0 \end{cases}, \text{得 } \begin{cases} 2x + 2y = 0 \\ 2y - 2z = 0 \end{cases}, \text{即 } \begin{cases} x + y = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}.$$

令 $z = 1$, 得 $\vec{m} = (-1, 1, 1)$.

……10 分

设直线 l 与平面 $B_1 D_1 E$ 所成角为 α .

$$\therefore \sin \alpha = \left| \frac{\vec{m} \cdot \overrightarrow{AF}}{|\vec{m}| |\overrightarrow{AF}|} \right| = \frac{3}{\sqrt{5} \times \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{15}}{5}.$$

……11 分

$\therefore$ 直线 l 与平面 $B_1 D_1 E$ 所成角的正弦值 $\frac{\sqrt{15}}{5}$.

……12 分

20. 解: (I) $\therefore f(x) = (x-2)e^x - \frac{a}{2}x^2 + ax, a \in \mathbf{R},$

$$\therefore f'(x) = (x-1)e^x - ax + a = (x-1)(e^x - a).$$

……1 分

①当 $a \leq 0$ 时, 令 $f'(x) < 0$, 得 $x < 1$. $\therefore f(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 上单调递减;

令 $f'(x) > 0$, 得 $x > 1$, $\therefore f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增.

……2 分

②当 $0 < a < e$ 时, 令 $f'(x) < 0$, 得 $\ln a < x < 1$. $\therefore f(x)$ 在 $(\ln a, 1)$ 上单调递减;

令 $f'(x) > 0$, 得 $x < \ln a$ 或 $x > 1$. $\therefore f(x)$ 在 $(-\infty, \ln a)$ 和 $(1, +\infty)$ 上单调递增.

……3 分

③当 $a = e$ 时, $f'(x) \geq 0$ 在 $x \in \mathbf{R}$ 时恒成立, $\therefore f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增.

……4 分

④当 $a > e$ 时, 令 $f'(x) < 0$, 得 $1 < x < \ln a$. $\therefore f(x)$ 在 $(1, \ln a)$ 上单调递减;

令 $f'(x) > 0$, 得 $x > \ln a$ 或 $x < 1$. $\therefore f(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 和 $(\ln a, +\infty)$ 上单调递增.

……5 分

综上所述, 当 $a \leq 0$ 时, $f(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 上单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增;

当 $0 < a < e$ 时, $f(x)$ 在 $(\ln a, 1)$ 上单调递减, 在 $(-\infty, \ln a)$ 和 $(1, +\infty)$ 上单调递增;

当 $a = e$ 时, $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增;

当 $a > e$ 时, $f(x)$ 在 $(1, \ln a)$ 上单调递减, 在 $(-\infty, 1)$ 和 $(\ln a, +\infty)$ 上单调递增.

……6 分

(II) 不等式 $f(x) + (x+1)e^x + \frac{a}{2}x^2 - 2ax + a > 0$, 等价于 $(2x-1)e^x > a(x-1)$.

①当 $x = 1$ 时, $0 < e$, 则 $a \in \mathbf{R}$.

……8 分

②当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $a < \frac{(2x-1)e^x}{x-1}$.

设函数 $g(x) = \frac{(2x-1)e^x}{x-1}$, 则 $g'(x) = \frac{x(2x-3)e^x}{(x-1)^2}$.

当 $x \in (1, \frac{3}{2})$ 时, $g'(x) < 0$, 此时 $g(x)$ 单调递减;

当 $x \in (\frac{3}{2}, +\infty)$ 时, $g'(x) > 0$, 此时 $g(x)$ 单调递增.

$$\therefore g(x)_{\min} = g(\frac{3}{2}) = 4e^{\frac{3}{2}}.$$

$$\therefore a < 4e^{\frac{3}{2}}.$$

……9 分

③当 $x \in (-\infty, 1)$ 时, $a > \frac{(2x-1)e^x}{x-1}$.

设函数 $h(x) = \frac{(2x-1)e^x}{x-1}$, 则 $h'(x) = \frac{x(2x-3)e^x}{(x-1)^2}$.

当 $x \in (0, 1)$ 时, $h'(x) < 0$, 此时 $h(x)$ 单调递减;

当 $x \in (-\infty, 0)$ 时, $h'(x) > 0$, 此时 $h(x)$ 单调递增.

$\therefore h(x)_{\max} = h(0) = 1$;

$\therefore a > 1$.

.....11 分

综上, a 的取值范围为 $(1, 4e^{\frac{3}{2}})$.

.....12 分

21. 解: (I) $\because$ 椭圆的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\therefore \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (c 为半焦距).

$\because$ 直线 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ 与圆 $x^2 + y^2 = 2$ 相切, $\therefore \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}} = \sqrt{2}$.

.....2 分

又 $\because c^2 + b^2 = a^2$, $\therefore a^2 = 6, b^2 = 3$.

$\therefore$ 椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1$.

.....4 分

(II) $\because M$ 为线段 AB 的中点, $\therefore \frac{S_1}{S_2} = \frac{S_{\triangle AOM}}{S_{\triangle BOP}} = \frac{|OM|}{|OP|}$.

(i) 当直线 l 的斜率不存在时, 由 $OA \perp OB$ 及椭圆的对称性, 不妨设 OA 所在直线的方程为 $y = x$, 得 $x_A^2 = 2$.

则 $x_M^2 = 2, x_P^2 = 6$, $\therefore \frac{S_1}{S_2} = \frac{|OM|}{|OP|} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

.....5 分

(ii) 当直线 l 的斜率存在时, 设直线 $l: y = kx + m$ ($m \neq 0$), $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$.

由 $\begin{cases} y = kx + m \\ \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases}$, 消去 y , 得 $(2k^2 + 1)x^2 + 4kmx + 2m^2 - 6 = 0$.

$\therefore \Delta = 16k^2m^2 - 8(2k^2 + 1)(m^2 - 3) = 8(6k^2 - m^2 + 3) > 0$, 即 $6k^2 - m^2 + 3 > 0$.

$\therefore x_1 + x_2 = -\frac{4km}{2k^2 + 1}, x_1x_2 = \frac{2m^2 - 6}{2k^2 + 1}$.

.....6 分

$\because$ 点 O 在以 AB 为直径的圆上, $\therefore \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$, 即 $x_1x_2 + y_1y_2 = 0$.

$\therefore x_1x_2 + y_1y_2 = (1 + k^2)x_1x_2 + km(x_1 + x_2) + m^2 = 0$.

$\therefore (1 + k^2) \frac{2m^2 - 6}{2k^2 + 1} + km(-\frac{4km}{2k^2 + 1}) + m^2 = 0$.

化简, 得 $m^2 = 2k^2 + 2$. 经检验满足 $\Delta > 0$ 成立.

.....7 分

$\therefore$ 线段 AB 的中点 $M(-\frac{2km}{2k^2 + 1}, \frac{m}{2k^2 + 1})$.

当 $k = 0$ 时, $m^2 = 2$. 此时 $\frac{S_1}{S_2} = \frac{|m|}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

.....8 分

当 $k \neq 0$ 时, 射线 OM 所在的直线方程为 $y = -\frac{1}{2k}x$.

由 $\begin{cases} y = -\frac{1}{2k}x \\ \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases}$, 消去 y , 得 $x_P^2 = \frac{12k^2}{2k^2 + 1}, y_P^2 = \frac{3}{2k^2 + 1}$.

$$\therefore \frac{|OM|}{|OP|} = \frac{|y_M|}{|y_P|} = \sqrt{\frac{m^2}{3(2k^2+1)}}. \quad \cdots 10 \text{ 分}$$

$$\therefore \frac{S_1}{S_2} = \sqrt{\frac{m^2}{3(2k^2+1)}} = \sqrt{\frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{2k^2+1}\right)}, \therefore \frac{S_1}{S_2} \in \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right). \quad \cdots 11 \text{ 分}$$

$$\text{综上, } \frac{S_1}{S_2} \text{ 的取值范围为 } \left[\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right]. \quad \cdots 12 \text{ 分}$$

22. 解: (I) 由曲线 C 的参数方程, 得 $(x-1)^2 + (y-2)^2 = (\sin\alpha + \cos\alpha)^2 + (\sin\alpha - \cos\alpha)^2$.

$$\therefore (\sin\alpha + \cos\alpha)^2 + (\sin\alpha - \cos\alpha)^2 = 2,$$

$$\therefore \text{曲线 } C \text{ 的普通方程为 } (x-1)^2 + (y-2)^2 = 2. \quad \cdots 3 \text{ 分}$$

$$\text{由 } \rho \sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}, \text{ 得 } \rho \sin\theta - \rho \cos\theta = 2.$$

$$\therefore \rho \cos\theta = x, \rho \sin\theta = y, \therefore \text{直线 } l \text{ 的直角坐标方程为 } x - y + 2 = 0. \quad \cdots 5 \text{ 分}$$

$$(II) \text{ 设直线 } l \text{ 的参数方程为 } \begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}t \\ y = 2 + \frac{\sqrt{2}}{2}t \end{cases} \quad (t \text{ 为参数, } t \in \mathbf{R}).$$

将直线 l 的参数方程代入曲线 C 的普通方程, 整理得

$$t^2 - \sqrt{2}t - 1 = 0. \quad \cdots (*) \quad \cdots 6 \text{ 分}$$

因 $\Delta > 0$, 设 t_1, t_2 是方程 $(*)$ 的两个实数根, 则有

$$t_1 + t_2 = \sqrt{2}, t_1 t_2 = -1. \quad \cdots 7 \text{ 分}$$

$$\therefore ||PA| - |PB|| = ||t_1| - |t_2|| = |t_1 + t_2| = \sqrt{2}. \quad \cdots 10 \text{ 分}$$

23. 解: (I) $\therefore |3-x| + |x-m| \geq |3-x+x-m| = |3-m|$,

当且仅当 $(3-x)(x-m) \geq 0$ 时, $f(x)$ 取得最小值 $|3-m|$.

$$\text{又 } \therefore f(x) = |3-x| + |x-m| \text{ 的最小值为 } 1, \therefore |3-m| = 1. \quad \cdots 2 \text{ 分}$$

$$\therefore m > 2, \therefore m = 4. \quad \cdots 3 \text{ 分}$$

$$\therefore f(x) + |x-m| > 2, \text{ 等价于 } |x-3| + 2|x-4| > 2.$$

当 $x \leq 3$ 时, 所求不等式等价于 $-3x + 11 > 2$. 解得 $x < 3$, 符合题意;

当 $3 < x < 4$ 时, 所求不等式等价于 $-x + 5 > 2$. 解得 $x < 3$, 与条件矛盾;

当 $x \geq 4$ 时, 所求不等式等价于 $3x - 11 > 2$. 解得 $x > \frac{13}{3}$, 符合题意.

$$\text{综上, 原不等式的解集为 } (-\infty, 3) \cup \left(\frac{13}{3}, +\infty\right). \quad \cdots 6 \text{ 分}$$

$$(II) \therefore m = 4, \therefore a^2 + 2b^2 + 3c^2 = \frac{3}{2}m = 6.$$

$$\therefore 6 = a^2 + 2b^2 + 3c^2 = a^2 + c^2 + 2(b^2 + c^2) \geq 2(ac + 2bc). \quad \cdots 8 \text{ 分}$$

$$\therefore ac + 2bc \leq 3.$$

$$\text{当且仅当 } a = b = c = \pm 1 \text{ 时, } ac + 2bc \text{ 取得最大值 } 3. \quad \cdots 10 \text{ 分}$$