

成都市 2018 级高中毕业班第一次诊断性检测

数学(文科)参考答案及评分意见

第 I 卷 (选择题,共 60 分)

一、选择题:(每小题 5 分,共 60 分)

1. B; 2. D; 3. A; 4. B; 5. A; 6. B; 7. C; 8. C; 9. D; 10. A; 11. D; 12. C.

第 II 卷 (非选择题,共 90 分)

二、填空题:(每小题 5 分,共 20 分)

13. -1 ; 14. -5 ; 15. 65 ; 16. $\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{4\pi}{9}$ (第一空 2 分,第二空 3 分).

三、解答题:(共 70 分)

17. 解:(I) $\because \tan \angle BMC = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \therefore \tan \angle BMA = \frac{\sqrt{3}}{2}$1 分

$\because \tan A = \tan(\pi - \angle ABM - \angle BMA) = -\tan(\angle ABM + \angle BMA),$ 2 分

$\therefore \tan A = -\frac{\tan \angle ABM + \tan \angle BMA}{1 - \tan \angle ABM \cdot \tan \angle BMA} = -\frac{\frac{\sqrt{3}}{5} + \frac{\sqrt{3}}{2}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{5} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = -\sqrt{3}.$ 4 分

$\because 0 < A < \pi, \therefore A = \frac{2\pi}{3}.$ 5 分

(II) $\because \tan \angle BMA = \frac{\sqrt{3}}{2}, \tan \angle ABM = \frac{\sqrt{3}}{5}, \therefore \sin \angle BMA = \frac{\sqrt{21}}{7}, \sin \angle ABM = \frac{\sqrt{21}}{14}.$

在 $\triangle ABM$ 中,由正弦定理,得 $\frac{AB}{\sin \angle BMA} = \frac{BM}{\sin A}.$

$\therefore AB = \frac{BM \cdot \sin \angle BMA}{\sin A} = \frac{\sqrt{21} \times \frac{\sqrt{21}}{7}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2\sqrt{3}.$ 8 分

$\therefore \triangle ABM$ 的面积 $S_{\triangle ABM} = \frac{1}{2} \cdot BM \cdot AB \cdot \sin \angle ABM = \frac{1}{2} \times \sqrt{21} \times 2\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{21}}{14} = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$ 10 分

$\because$ 点 M 在边 AC 上, $CM = 3MA,$

$\therefore \triangle ABC$ 的面积 $S_{\triangle ABC} = 4S_{\triangle ABM} = 6\sqrt{3}.$ 12 分

18. 解:(I) 由题中 2×2 列联表可得, $K^2 = \frac{100(10 \times 30 - 20 \times 40)^2}{50 \times 50 \times 30 \times 70} = 4.762 > 3.841.$ 3 分

$\therefore$ 有 95% 的把握认为“网红乡土直播员”与性别有关系.4 分

(II) 在“网红乡土直播员”中按分层抽样的方法抽取 6 人,男性人数为 $6 \times \frac{10}{30} = 2$ 人,记

为 A, B ; 女性人数为 $6 \times \frac{20}{30} = 4$ 人, 记为 a, b, c, d6 分

则从这 6 人中随机抽取 2 人的所有可能情况有以下“ $A, B; A, a; A, b; A, c; A, d; B, a; B, b; B, c; B, d; a, b; a, c; a, d; b, c; b, d; c, d$ ”共 15 种.9 分

其中, 选中的 2 人中恰有一男一女的所有可能情况有以下“ $A, a; A, b; A, c; A, d; B, a; B, b; B, c; B, d$ ”共 8 种.11 分

$\therefore$ 选中的 2 人中恰有一男一女的概率 $P = \frac{8}{15}$12 分

19. 解: (I) $\because V_{E-AFM} = V_{A-EFM}$, $AB \perp$ 平面 EFM ,

$\because M, E$ 分别为 BB_1, CC_1 的中点, $\therefore$ 四边形 $MBCE$ 为正方形.

$$\therefore S_{\triangle MEF} = \frac{1}{2} ME \cdot MB = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2.$$

$$\therefore V_{A-EFM} = \frac{1}{3} S_{\triangle MEF} \cdot AB = \frac{1}{3} \times 2 \times 2 = \frac{4}{3}. \quad \text{.....4 分}$$

$$\therefore \text{三棱锥 } E-AFM \text{ 的体积为 } \frac{4}{3}. \quad \text{.....5 分}$$

(II) 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 四边形 BCC_1B_1 是矩形.

$\because E, M$ 分别为棱 CC_1, BB_1 的中点, 且 $BB_1 = 4, B_1C_1 = 2$,

$\therefore$ 四边形 MEC_1B_1 是正方形.

$$\therefore C_1M \perp B_1E. \quad \text{.....7 分}$$

$\because N, M$ 分别为棱 AA_1, BB_1 的中点,

$\therefore NM \perp$ 平面 BCC_1B_1 .

又 $B_1E \subset$ 平面 BCC_1B_1 , $\therefore NM \perp B_1E$9 分

$\because NM \cap C_1M = M, NM, C_1M \subset$ 平面 C_1MN ,

$\therefore B_1E \perp$ 平面 C_1MN .

$\because B_1E \subset$ 平面 B_1D_1E ,10 分

$\therefore$ 平面 $B_1D_1E \perp$ 平面 C_1MN12 分

20. 解: (I) $\because f(x) = (x-2)e^x - \frac{a}{2}x^2 + ax, a \in \mathbf{R}$,

$$\therefore f'(x) = (x-1)e^x - ax + a = (x-1)(e^x - a). \quad \text{.....1 分}$$

① 当 $a \leq 0$ 时, 令 $f'(x) < 0$, 得 $x < 1$, $\therefore f(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 上单调递减;

令 $f'(x) > 0$, 得 $x > 1$, $\therefore f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增.2 分

② 当 $0 < a < e$ 时, 令 $f'(x) < 0$, 得 $\ln a < x < 1$, $\therefore f(x)$ 在 $(\ln a, 1)$ 上单调递减;

令 $f'(x) > 0$, 得 $x < \ln a$ 或 $x > 1$, $\therefore f(x)$ 在 $(-\infty, \ln a)$ 和 $(1, +\infty)$ 上单调递增.

.....3 分

③ 当 $a = e$ 时, $f'(x) \geq 0$ 在 $x \in \mathbf{R}$ 时恒成立, $\therefore f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增.4 分

④ 当 $a > e$ 时, 令 $f'(x) < 0$, 得 $1 < x < \ln a$, $\therefore f(x)$ 在 $(1, \ln a)$ 上单调递减;

令 $f'(x) > 0$, 得 $x > \ln a$ 或 $x < 1$, $\therefore f(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 和 $(\ln a, +\infty)$ 上单调递增.

.....5 分

综上所述, 当 $a \leq 0$ 时, $f(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 上单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增;

当 $0 < a < e$ 时, $f(x)$ 在 $(\ln a, 1)$ 上单调递减, 在 $(-\infty, \ln a)$ 和 $(1, +\infty)$ 上单调递增;

当 $a = e$ 时, $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增;

当 $a > e$ 时, $f(x)$ 在 $(1, \ln a)$ 上单调递减, 在 $(-\infty, 1)$ 和 $(\ln a, +\infty)$ 上单调递增.

.....6 分

(II) 不等式 $f(x) + (x+1)e^x + \frac{a}{2}x^2 - 2ax + a > 0$, 等价于 $(2x-1)e^x > a(x-1)$.

$\because x \in (-\infty, 1)$, $\therefore a > \frac{(2x-1)e^x}{x-1}$7 分

设函数 $h(x) = \frac{(2x-1)e^x}{x-1}$, 则 $h'(x) = \frac{x(2x-3)e^x}{(x-1)^2}$8 分

当 $x \in (0, 1)$ 时, $h'(x) < 0$, 此时 $h(x)$ 单调递减;9 分

当 $x \in (-\infty, 0)$ 时, $h'(x) > 0$, 此时 $h(x)$ 单调递增.10 分

$\therefore h(x)_{\max} = h(0) = 1$.

$\therefore a > 1$11 分

综上, a 的取值范围为 $(1, +\infty)$12 分

21. 解: (I) $\because$ 椭圆的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\therefore \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (c 为半焦距).

$\because$ 直线 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ 与圆 $x^2 + y^2 = 2$ 相切, $\therefore \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}} = \sqrt{2}$2 分

又 $\because c^2 + b^2 = a^2$, $\therefore a^2 = 6, b^2 = 3$.

$\therefore$ 椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1$4 分

(II) (i) 当直线 l 的斜率不存在时, 设直线 l 的方程为 $x = n$ ($-\sqrt{6} < n < \sqrt{6}$).

$\because |OP| = \sqrt{15} |OM|$, $\therefore \sqrt{6} = \sqrt{15} |n|$, $\therefore n^2 = \frac{2}{5}$.

$\therefore S_{\triangle ABO} = |n| \sqrt{3(1 - \frac{n^2}{6})} = \frac{\sqrt{10}}{5} \times \frac{\sqrt{14}}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{7}}{5}$5 分

(ii) 当直线 l 的斜率存在时, 设直线 $l: y = kx + m$ ($m \neq 0$), $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$.

由 $\begin{cases} y = kx + m \\ \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases}$, 消去 y , 得 $(2k^2 + 1)x^2 + 4kmx + 2m^2 - 6 = 0$.

$\therefore \Delta = 16k^2m^2 - 8(2k^2 + 1)(m^2 - 3) = 8(6k^2 - m^2 + 3) > 0$, 即 $6k^2 - m^2 + 3 > 0$.

$\therefore x_1 + x_2 = -\frac{4km}{2k^2 + 1}, x_1x_2 = \frac{2m^2 - 6}{2k^2 + 1}$6 分

$\therefore$ 线段 AB 的中点 $M(-\frac{2km}{2k^2 + 1}, \frac{m}{2k^2 + 1})$.

当 $k = 0$ 时, $\because |OP| = \sqrt{15} |OM|$, $\therefore \sqrt{3} = \sqrt{15} |m|$, $\therefore m^2 = \frac{1}{5}$.

$\therefore S_{\triangle ABO} = |m| \sqrt{6(1 - \frac{m^2}{3})} = \frac{2\sqrt{7}}{5}$7 分

当 $k \neq 0$ 时, 射线 OM 所在直线的方程为 $y = -\frac{1}{2k}x$.

由 $\begin{cases} y = -\frac{1}{2k}x \\ \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases}$, 消去 y , 得 $x_P^2 = \frac{12k^2}{2k^2 + 1}, y_P^2 = \frac{3}{2k^2 + 1}$.

$$\therefore \frac{|OM|}{|OP|} = \frac{|y_M|}{|y_P|} = \sqrt{\frac{m^2}{3(2k^2+1)}} = \frac{1}{\sqrt{15}}.$$

$\therefore 5m^2 = 2k^2 + 1$. 经检验满足 $\Delta > 0$ 成立.9 分

设点 O 到直线 l 的距离为 d , 则 $d = \frac{|m|}{\sqrt{1+k^2}}$10 分

$$\therefore S_{\triangle ABO} = \frac{1}{2} d \sqrt{1+k^2} |x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{2} |m| \sqrt{6k^2+3-m^2}}{2k^2+1} = \frac{\sqrt{2} |m| \sqrt{14m^2}}{5m^2} = \frac{2}{5} \sqrt{7}.$$

综上, $\triangle ABO$ 的面积为 $\frac{2\sqrt{7}}{5}$12 分

22. 解: (I) 由曲线 C 的参数方程, 得 $(x-1)^2 + (y-2)^2 = (\sin\alpha + \cos\alpha)^2 + (\sin\alpha - \cos\alpha)^2$.

$$\therefore (\sin\alpha + \cos\alpha)^2 + (\sin\alpha - \cos\alpha)^2 = 2,$$

$\therefore$ 曲线 C 的普通方程为 $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 2$3 分

由 $\rho \sin(\theta - \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}$, 得 $\rho \sin\theta - \rho \cos\theta = 2$.

$\therefore \rho \cos\theta = x, \rho \sin\theta = y, \therefore$ 直线 l 的直角坐标方程为 $x - y + 2 = 0$5 分

$$(II) \text{ 设直线 } l \text{ 的参数方程为 } \begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}t \\ y = 2 + \frac{\sqrt{2}}{2}t \end{cases} \quad (t \text{ 为参数}, t \in \mathbf{R}).$$

将直线 l 的参数方程代入曲线 C 的普通方程, 整理得

$$t^2 - \sqrt{2}t - 1 = 0. \dots (*) \quad \dots\dots 6 \text{ 分}$$

因 $\Delta > 0$, 设 t_1, t_2 是方程 $(*)$ 的两个实数根, 则有

$$t_1 + t_2 = \sqrt{2}, t_1 t_2 = -1. \quad \dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$\therefore ||PA| - |PB|| = ||t_1| - |t_2|| = |t_1 + t_2| = \sqrt{2}. \quad \dots\dots 10 \text{ 分}$$

23. 解: (I) $\therefore |3-x| + |x-m| \geq |3-x+x-m| = |3-m|$,

当且仅当 $(3-x)(x-m) \geq 0$ 时, $f(x)$ 取得最小值 $|3-m|$.

又 $\therefore f(x) = |3-x| + |x-m|$ 的最小值为 1, $\therefore |3-m| = 1$2 分

$\therefore m > 2, \therefore m = 4$3 分

$\therefore f(x) + |x-m| > 2$, 等价于 $|x-3| + 2|x-4| > 2$.

当 $x \leq 3$ 时, 所求不等式等价于 $-3x + 11 > 2$. 解得 $x < 3$, 符合题意;

当 $3 < x < 4$ 时, 所求不等式等价于 $-x + 5 > 2$. 解得 $x < 3$, 与条件矛盾;

当 $x \geq 4$ 时, 所求不等式等价于 $3x - 11 > 2$. 解得 $x > \frac{13}{3}$, 符合题意.

综上, 原不等式的解集为 $(-\infty, 3) \cup (\frac{13}{3}, +\infty)$6 分

(II) $\therefore m = 4, \therefore a^2 + 2b^2 + 3c^2 = \frac{3}{2}m = 6$.

$$\therefore 6 = a^2 + 2b^2 + 3c^2 = a^2 + c^2 + 2(b^2 + c^2) \geq 2(ac + 2bc). \quad \dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\therefore ac + 2bc \leq 3.$$

当且仅当 $a = b = c = \pm 1$ 时, $ac + 2bc$ 取得最大值 3.10 分