

成都市 2018 级高中毕业班第一次诊断性检测

数 学(理科)

本试卷分选择题和非选择题两部分。第 I 卷(选择题)1 至 2 页,第 II 卷(非选择题)3 至 4 页,共 4 页,满分 150 分,考试时间 120 分钟。

注意事项:

1. 答题前,务必将自己的姓名、考籍号填写在答题卡规定的位置上。
2. 答选择题时,必须使用 2B 铅笔将答题卡上对应题目的答案标号涂黑,如需改动,用橡皮擦擦干净后,再选涂其它答案标号。
3. 答非选择题时,必须使用 0.5 毫米黑色签字笔,将答案书写在答题卡规定的位置上。
4. 所有题目必须在答题卡上作答,在试题卷上答题无效。
5. 考试结束后,只将答题卡交回。

第 I 卷 (选择题,共 60 分)

一、选择题:本大题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 设集合 $A = \{x \mid x^2 - 3x - 4 < 0\}$, $B = \{x \mid |x - 1| < 3, x \in \mathbf{N}\}$, 则 $A \cap B =$
(A) $\{1, 2, 3\}$ (B) $\{0, 1, 2, 3\}$
(C) $\{x \mid -1 < x < 4\}$ (D) $\{x \mid -2 < x < 4\}$
2. 复数 $z = \frac{1+2i}{i}$ (i 为虚数单位), 则 z 的共轭复数是
(A) $-2-i$ (B) $-2+i$ (C) $2-i$ (D) $2+i$
3. 若等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_2 + a_3 = 2$, $a_2 - a_4 = 6$, 则 $a_6 =$
(A) -32 (B) -8 (C) 8 (D) 64
4. 甲乙两台机床同时生产一种零件,10 天中,两台机床每天出的次品数分别是:

甲	0	1	0	2	2	0	3	1	2	4
乙	2	2	1	1	1	2	1	1	0	1

$\bar{x}_1, \bar{x}_2$ 分别表示甲乙两组数据的平均数, S_1, S_2 分别表示甲乙两组数据的方差, 则下列选项正确的是

- (A) $\bar{x}_1 = \bar{x}_2, S_1 > S_2$ (B) $\bar{x}_1 > \bar{x}_2, S_1 > S_2$
(C) $\bar{x}_1 < \bar{x}_2, S_1 > S_2$ (D) $\bar{x}_1 > \bar{x}_2, S_1 < S_2$

5. 若函数 $f(x) = x^3 - 3x^2 + a$ 有且仅有一个零点, 则实数 a 的取值范围为
(A) $(-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$ (B) $(-\infty, -8) \cup (0, +\infty)$
(C) $[0, 4]$ (D) $(-8, 0)$

6. 若向量 a, b 满足 $|a| = 2, (a + 2b) \cdot a = 6$, 则 b 在 a 方向上的投影为
(A) 1 (B) $\frac{1}{2}$ (C) $-\frac{1}{2}$ (D) -1

7. 设 $a = \log_{2020} \sqrt{2021}, b = \ln \sqrt{2}, c = 2021^{\frac{1}{2020}}$, 则 a, b, c 的大小关系是
(A) $a > b > c$ (B) $a > c > b$ (C) $c > a > b$ (D) $c > b > a$

8. 若 α, β, γ 是空间中三个不同的平面, $\alpha \cap \beta = l, \alpha \cap \gamma = m, \gamma \cap \beta = n$, 则 $l \parallel m$ 是 $n \parallel m$ 的
(A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件
(C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要条件

9. 已知平行于 x 轴的一条直线与双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 相交于 P, Q 两点, $|PQ| = 4a$, $\angle PQO = \frac{\pi}{3}$ (O 为坐标原点), 则该双曲线的离心率为

- (A) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ (B) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ (C) $\sqrt{6}$ (D) $\sqrt{5}$

10. 已知锐角 φ 满足 $\sqrt{3} \sin \varphi - \cos \varphi = 1$. 若要得到函数 $f(x) = \frac{1}{2} - \sin^2(x + \varphi)$ 的图象, 则可

以将函数 $y = \frac{1}{2} \sin 2x$ 的图象

- (A) 向左平移 $\frac{7\pi}{12}$ 个单位长度 (B) 向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度
(C) 向右平移 $\frac{7\pi}{12}$ 个单位长度 (D) 向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度

11. 已知抛物线 $x^2 = 4y$ 的焦点为 F , 过 F 的直线 l 与抛物线相交于 A, B 两点, $P(0, -\frac{7}{2})$. 若 $PB \perp AB$, 则 $|AF| =$

- (A) $\frac{3}{2}$ (B) 2 (C) $\frac{5}{2}$ (D) 3

12. 已知函数 $f(x) = x + \ln(x-1), g(x) = x \ln x$. 若 $f(x_1) = 1 + 2 \ln t, g(x_2) = t^2$, 则 $(x_1 x_2 - x_2) \ln t$ 的最小值为

- (A) $\frac{1}{e^2}$ (B) $\frac{2}{e}$ (C) $-\frac{1}{2e}$ (D) $-\frac{1}{e}$

第 II 卷 (非选择题, 共 90 分)

二、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 把答案填在答题卡上.

13. $(\sqrt{x} - \frac{1}{x})^7$ 的展开式中 x^{-1} 的系数是 _____. (用数字作答)

14. 若 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x+2y \leq 1, \\ 2x+y \geq -1, \\ x-y \leq 0, \end{cases}$ 则 $z=2x-3y$ 的最小值为 _____.

15. 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $a_n + 2S_n = 3^n$, 数列 $\{b_n\}$ 满足 $3^{b_n} = \frac{1}{2}(3a_{n+2} - a_{n+1})$ ($n \in \mathbb{N}^*$), 则数列 $\{b_n\}$ 的前 10 项和为 _____.

16. 在三棱锥 $P-ABC$ 中, $PA \perp$ 平面 ABC , $AB \perp BC$, $PA=AB=1$, $AC=\sqrt{2}$. 三棱锥 $P-ABC$ 的所有顶点都在球 O 的表面上, 则球 O 的半径为 _____; 若点 M, N 分别是 $\triangle ABC$ 与 $\triangle PAC$ 的重心, 直线 MN 与球 O 的表面相交于 D, E 两点, 则线段 DE 的长度为 _____. (本小题第一空 2 分, 第二空 3 分)

三、解答题: 本大题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分 12 分)

在 $\triangle ABC$ 中, 点 M 在边 AC 上, $CM=3MA$, $\tan \angle ABM = \frac{\sqrt{3}}{5}$, $\tan \angle BMC = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(I) 求角 A 的大小;

(II) 若 $BM=\sqrt{21}$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

18. (本小题满分 12 分)

一网络公司为某贫困山区培养了 100 名“乡土直播员”, 以帮助宣传该山区文化和销售该山区的农副产品, 从而带领山区人民早日脱贫致富. 该公司将这 100 名“乡土直播员”中每天直播时间不少于 5 小时的评为“网红乡土直播员”, 其余的评为“乡土直播达人”. 根据实际评选结果得到了下面 2×2 列联表:

	网红乡土直播员	乡土直播达人	合计
男	10	40	50
女	20	30	50
合计	30	70	100

(I) 根据列联表判断是否有 95% 的把握认为“网红乡土直播员”与性别有关系?

(II) 在“网红乡土直播员”中按分层抽样的方法抽取 6 人, 在这 6 人中选 2 人作为“乡土直播推广大使”. 设被选中的 2 名“乡土直播推广大使”中男性人数为 ξ , 求 ξ 的分布列和期望.

附: $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$, 其中 $n=a+b+c+d$.

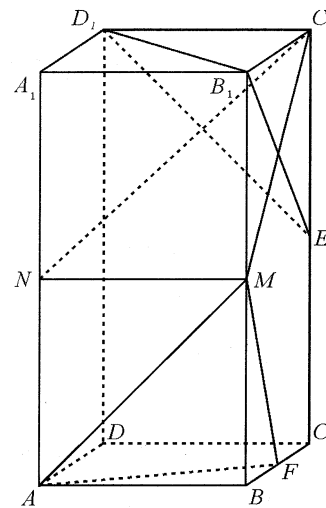
$P(K^2 \geq k_0)$	0.15	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
k_0	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

19. (本小题满分 12 分)

如图, 长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的底面是边长为 2 的正方形, $AA_1=4$, 点 E, F, M, N 分别为棱 CC_1, BC, BB_1, AA_1 的中点.

(I) 求证: 平面 $B_1D_1E \perp$ 平面 C_1MN ;

(II) 若平面 $AFM \cap$ 平面 $A_1B_1C_1D_1 = l$, 求直线 l 与平面 B_1D_1E 所成角的正弦值.



20. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = (x-2)e^x - \frac{a}{2}x^2 + ax$, $a \in \mathbb{R}$.

(I) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性;

(II) 若不等式 $f(x) + (x+1)e^x + \frac{a}{2}x^2 - 2ax + a > 0$ 恒成立, 求 a 的取值范围.

21. (本小题满分 12 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 且直线 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ 与圆 $x^2 + y^2 = 2$ 相切.

(I) 求椭圆 C 的方程;

(II) 设直线 l 与椭圆 C 相交于不同的两点 A, B , M 为线段 AB 的中点, O 为坐标原点, 射线 OM 与椭圆 C 相交于点 P , 且 O 点在以 AB 为直径的圆上. 记 $\triangle AOM$, $\triangle BOP$ 的面积分别为 S_1, S_2 , 求 $\frac{S_1}{S_2}$ 的取值范围.

请考生在第 22, 23 题中任选择一题作答, 如果多做, 则按所做的第一题记分. 作答时, 用 2B 铅笔在答题卡上把所选题目对应的标号涂黑.

22. (本小题满分 10 分) 选修 4-4: 坐标系与参数方程

在平面直角坐标系中, 曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = 1 + \sin \alpha + \cos \alpha \\ y = 2 + \sin \alpha - \cos \alpha \end{cases}$ (α 为参数), 以坐标原点 O 为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系, 直线 l 的极坐标方程为 $\rho \sin(\theta - \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}$.

(I) 求曲线 C 的普通方程和直线 l 的直角坐标方程;

(II) 设点 $P(0, 2)$. 若直线 l 与曲线 C 相交于 A, B 两点, 求 $||PA| - |PB||$ 的值.

23. (本小题满分 10 分) 选修 4-5: 不等式选讲

已知函数 $f(x) = |3-x| + |x-m|$ ($m > 2$) 的最小值为 1.

(I) 求不等式 $f(x) + |x-m| > 2$ 的解集;

(II) 若 $a^2 + 2b^2 + 3c^2 = \frac{3}{2}m$, 求 $ac + 2bc$ 的最大值.