秘密 ★ 启用前 【考试时间：2020 年 11 月 1 日 15：00—17：00】

绵阳市高中 2018 级第一次诊断性考试

文科数学

注意事项：

1．答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。

2．回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3．考试结束后，将答题卡交回。

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．已知 $A=\{x\mid 0<x<2\}$，$B=\{x\mid x(1-x)\geqslant 0\}$，则 $A\cap B=$

A．$\varnothing$　　B．$(-\infty,1]$　　C．$[1,2)$　　D．$(0,1]$

2．下列函数中，在定义域内既是奇函数又是增函数的是

A．$y=\tan x$　　B．$y=\ln x$　　C．$y=x^3$　　D．$y=x^2$

3．若 $a<b<0$，则下列不等式中成立的是

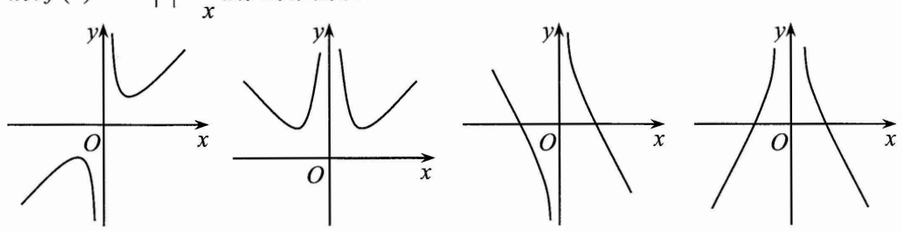
A．$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$　　B．$\frac{1}{a-b}>\frac{1}{a}$

C．$a+\frac{1}{b}>b+\frac{1}{a}$　　D．$(a-1)^2>(b-1)^2$

4．函数 $f(x)=\sin(\frac{\pi}{2}x+\frac{\pi}{4})$ 的图象的一条对称轴是

A．$x=-\frac{3}{2}$　　B．$x=0$　　C．$x=\frac{\pi}{2}$　　D．$x=-3$

5．函数 $f(x)=x\ln|x|+\frac{2}{x}$ 的大致图象是



6．已知命题 p：$\triangle ABC$ 中，若 $\cos A=\cos B$，则 $A=B$；命题 q：向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 相等的充要条件是 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$，且 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$．下列四个命题中是真命题的是

A．$p\wedge(\neg q)$　　B．$p\wedge q$

C．$(\neg p)\wedge q$　　D．$(\neg p)\wedge(\neg q)$

7．若曲线 $y=-\sqrt{x}$ 在点$(1,-1)$处的切线与曲线 $y=\ln x$ 在点 P 处的切线垂直，则点 P 的坐标为

A．$(e,1)$　　B．$(1,0)$　　C．$(2,\ln 2)$　　D．$(\frac{1}{2},-\ln 2)$

8．若 $\log_a\frac{3}{4}<1$，其中 $a>0$，且 $a\neq 1$，则实数 a 的取值范围是

A．$(0,\frac{3}{4})$　　B．$(0,\frac{3}{4})\cup(1,+\infty)$

C．$(\frac{3}{4},1)\cup(1,+\infty)$　　D．$(\frac{3}{4},+\infty)$

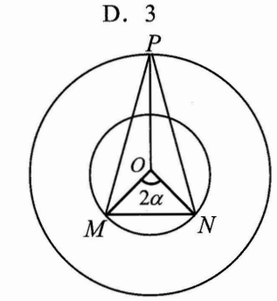
9．已知菱形 $ABCD$ 的对角线相交于点 O，点 E 为 AO 的中点，若 $AB=2$，$\angle BAD=60^\circ$，则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DE}=$

A．-2　　B．$-\frac{1}{2}$　　C．$-\frac{7}{2}$　　D．$\frac{1}{2}$

10．等比数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，若 $S_n=t\cdot 2^{n-1}-1$，则 $t=$

A．-2　　B．1　　C．2　　D．3

11．某城市要在广场中央的圆形地面设计一块浮雕，以彰显城市积极向上的活力. 某公司设计方案如图，等腰$\triangle PMN$ 的顶点 P 在半径为 20m 的大$\odot O$ 上，点 M，N 在半径为 10m 的小$\odot O$ 上，点 O，点 P 在弦 MN 的同侧. 设$\angle MON=2\alpha$ $(\alpha<\frac{\pi}{2})$，当$\triangle PMN$ 的面积最大时，对于其它区域中的某材料成本最省，则此时 $\cos\alpha=$



A．$\frac{1}{2}$　　B．$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　C．$\frac{\sqrt{3}-1}{2}$　　D．$\frac{\sqrt{2}}{2}$

12．若 $2^{a+1}=3$，$2^b=\frac{8}{3}$，则以下结论正确的有

①$b-a<1$；　②$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}>2$；　③$ab>\frac{3}{4}$；　④$b^2>2a$

A．1 个　　B．2 个　　C．3 个　　D．4 个

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13．已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,0)$，$\boldsymbol{b}=(1,1)$，且 $\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 垂直，则实数 $\lambda=$_____.

14．若实数 x，y 满足 $\begin{cases} x\geqslant 0, \\ x\leqslant y, \\ x+2\geqslant 2y, \end{cases}$ 则 $z=2x+y$ 的最大值为_____.

15．已知 $\sin x+\cos y=\dfrac{1}{4}$，则 $\sin x-\sin^2 y$ 的最大值为_____.

16．若函数 $f(x)=(x^2+ax+2a)\mathrm{e}^x$ 在区间$(-2,1)$上恰有一个极值点，则实数 a 的取值范围为_____.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

（一）必考题：共 60 分。

17．（12 分）

已知 S_n 是等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和，$S_3=15$，$a_1\cdot a_2=a_7$.

（1）求 a_n；

（2）若 $b_n=2^{a_n}+a_n$，求数列$\{b_n\}$的前 n 项和 T_n.

18．（12 分）

已知函数 $f(x)=2\sqrt{3}\cos x\cdot\sin(x+\dfrac{\pi}{6})-\dfrac{\sqrt{3}}{2}(x\in\mathbf{R})$.

（1）判断函数 $f(x)$ 在$[0,\dfrac{\pi}{2}]$上的单调性；

（2）将函数 $f(x)$ 的图象向右平移$\dfrac{1}{4}$个周期后得到函数 $g(x)$的图象，求函数 $g(x)$在区间$[0,\dfrac{\pi}{2}]$上的值域.

19．（12 分）

在△ABC 中，角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，已知 $c\sin A=a\cos(C-\dfrac{\pi}{6})$.

（1）求角 C 的大小；

（2）若 $\cos B=-\dfrac{1}{7}$，$c=7$，求 AB 边上的高.

20．（12 分）

已知函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，当 $x<0$ 时，$f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}+1$.

（1）求函数 $f(x)$ 的解析式；

（2）若对于任意的 $x>0$，不等式 $f(x^2)+2af(x)\geqslant -1$ 恒成立，求实数 a 的取值范围.

21．（12 分）

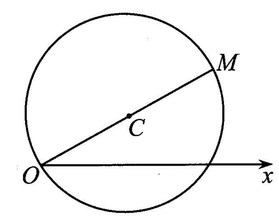
已知函数 $f(x)=x^3-ax^2+4a\ (a\in\mathbf{R})$.

（1）试讨论函数 $f(x)$ 的单调性；

（2）若方程 $f(x)=m$ 有三个不相等实数根时，实数 a 的取值范围恰好是 $(-\infty,-6)\cup(2,3)\cup(3,+\infty)$，求实数 m 的值.

（二）选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题做答。如果多做，则按所做的第一题记分。

22．[选修 4-4：坐标系与参数方程]（10 分）

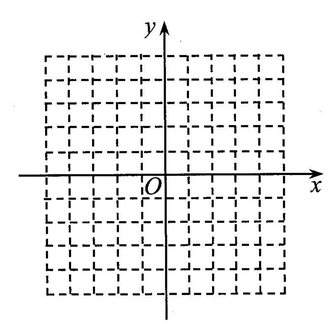


如图，在极坐标系中，点 O 为极点，已知 $M(4\sqrt{3},\dfrac{\pi}{6})$，以 OM 为直径作圆 C.

（1）求圆 C 的极坐标方程；

（2）若点 P 为圆 C 左上半圆弧 $\overset{\frown}{OM}$ 上的三等分点，求点 P 的极坐标.

23．[选修 4-5：不等式选讲]（10 分）



已知函数 $f(x)=|2x+1|-|2x-3|$.

（1）在如右的网格图中画出函数 $f(x)$ 的图象；

（2）若实数 m 满足 $f(2m-1)<f(2m+1)$，求 m 的取值范围.

绵阳市高中 2018 级第一次诊断性考试

文科数学参考答案及评分意见

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分．

DCDAA　ADBBC　CD

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．

13．-1　　14．6　　15．$\frac{9}{16}$　　16．$(-\frac{3}{4},0]$

三、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分．

17．解：（1）设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d．

∵ $S_3=a_1+a_2+a_3=3a_2=15$，得 $a_2=5$．

又 $a_1\cdot a_2=a_7$，得 $(a_2-d)\cdot a_2=a_2+5d$，　……3 分

即 $5(5-d)=5+5d$，

解得 $d=2$．

∴ $a_n=a_2+(n-2)\times 2=2n+1$．　……6 分

（2）由题意得 $b_n=2^{a_n}+a_n=2^{2n+1}+(2n+1)=2\times 4^n+(2n+1)$，　……8 分

$$T_n=2(4^1+4^2+\cdots+4^n)+\frac{n(3+2n+1)}{2}$$

$$=\frac{8(4^n-1)}{3}+n^2+2n.$$　……12 分

18．解：（1）$f(x)=2\sqrt{3}\cos x\cdot\sin(x+\frac{\pi}{6})-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$=2\sqrt{3}\cos x(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x)-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$=3\sin x\cos x+\sqrt{3}\cos^2 x-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$=\frac{3}{2}\sin 2x+\sqrt{3}\times\frac{1+\cos 2x}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$=\sqrt{3}\sin(2x+\frac{\pi}{6}).$$　……4 分

由 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant 2x+\frac{\pi}{6}\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2}\ (k\in\mathbf{Z})$，

可得 $k\pi-\frac{\pi}{3}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{\pi}{6}\ (k\in\mathbf{Z})$，

即当 $x\in[k\pi-\frac{\pi}{3},\ k\pi+\frac{\pi}{6}]\ (k\in\mathbf{Z})$时，函数 $f(x)$ 单调递增，

同理可得当 $x\in[k\pi+\frac{\pi}{6},\ k\pi+\frac{2\pi}{3}]\ (k\in\mathbf{Z})$时，函数 $f(x)$ 单调递减，

又 $x\in[0,\ \frac{\pi}{2}]$，

∴ 函数 $f(x)$ 在 $[0,\ \frac{\pi}{6}]$ 上单调递增， $f(x)$ 在 $[\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{2}]$ 上单调递减． ……8 分

（2）由题意得 $g(x)=\sqrt{3}\sin[2(x-\frac{\pi}{4})+\frac{\pi}{6}]=\sqrt{3}\sin(2x-\frac{\pi}{3})$.

∵ $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$， ∴ $-\frac{\pi}{3}\leqslant 2x-\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{2\pi}{3}$，

∴ $\sqrt{3}\sin(2x-\frac{\pi}{3})\in[-\frac{\sqrt{3}}{2},\ 1]$，

∴ $g(x)\in[-\frac{3}{2},\ \sqrt{3}]$． ……12 分

19．解：（1）在△ABC 中，由正弦定理得 $\sin C\sin A=\sin A\cos(C-\frac{\pi}{6})$，

∵ $0<A<\pi$ ∴ $\sin A\neq 0$，

∴ $\sin C=\cos(C-\frac{\pi}{6})=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos C+\frac{1}{2}\sin C$，

即 $\sin C=\sqrt{3}\cos C$， 得 $\tan C=\sqrt{3}$.

∵ $0<C<\pi$，

∴ $C=\frac{\pi}{3}$． ……6 分

（2）由题意得 $\sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\frac{4\sqrt{3}}{7}$.

在△ABC 中， 由正弦定理得 $AC=\frac{AB\cdot\sin B}{\sin C}=8$． ……8 分

$\sin A=\sin(B+\frac{\pi}{3})=\frac{1}{2}\sin B+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos B=\frac{3\sqrt{3}}{14}$，

∴ AB 边上的高 $h=AC\cdot\sin A=\frac{12\sqrt{3}}{7}$． ……12 分

20．**解**：（1）当 $x=0$ 时，$f(x)=0$；

当 $x>0$ 时，$f(x)=-f(-x)=-[\frac{(-x)^2+1}{-x}+1]=\frac{x^2+1}{x}-1$；

综上，所述 $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2+1}{x}-1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ \frac{x^2+1}{x}+1, & x<0.\end{cases}$ ……5 分

（2）不等式 $f(x^2)+2af(x)\geqslant -1$ 恒成立，

等价于 $x^2+\frac{1}{x^2}-1+2a(x+\frac{1}{x}-1)\geqslant -1$，

整理得 $(x+\frac{1}{x})^2-2+2a(x+\frac{1}{x}-1)\geqslant 0$，

令 $t=x+\frac{1}{x}$，

即 $t^2-2+2a(t-1)\geqslant 0$ 恒成立， ……8 分

∵ $x>0$，于是 $t\geqslant 2$，∴ $t-1\geqslant 0$，

于是 $2a\geqslant \frac{2-t^2}{t-1}=-(t-1)+\frac{1}{t-1}-2$，

令 $m=t-1\geqslant 1$，$g(m)=-m+\frac{1}{m}+2$， ……10 分

显然 $g(m)$ 在区间 $[1,+\infty)$ 上单调递减，

∴ $g(m)_{\max}=g(1)=2$.

∴ $2a\geqslant 2$，即 $a\geqslant 1$. ……12 分

21．**解**：（1）$f'(x)=3x^2-2ax=3x(x-\frac{2a}{3})$.

当 $a=0$ 时，$f'(x)=3x^2\geqslant 0$，函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增. ……2 分

当 $a>0$ 时，由 $f'(x)>0$，得 $x<0$ 或 $x>\frac{2a}{3}$.

由 $f'(x)<0$，得 $0<x<\frac{2a}{3}$.

∴函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 和 $(\frac{2a}{3},+\infty)$ 上单调递增，在 $(0,\frac{2a}{3})$ 上单调递减.

当 $a<0$ 时，同理可得函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,\frac{2a}{3})$ 和 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

在 $(\frac{2a}{3},0)$ 上单调递减. ……6 分

（2）由（1）可知，

函数 $f(x)$ 的两个极值为 $f(0)=4a$ 和 $f(\frac{2a}{3})=-\frac{4}{27}a^3+4a$，

由方程 $f(x)=m$ 有三个不等实根等价于

$\begin{cases} a>0, \\ -\frac{4}{27}a^3+4a<m<4a \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a<0, \\ 4a<m<-\frac{4}{27}a^3+4a. \end{cases}$ ……8 分

令 $g(a)=-\frac{4}{27}a^3+4a-m$.

由方程 $f(x)=m$ 有三个不相等实根时，$a\in(-\infty,-6)\cup(2,3)\cup(3,+\infty)$.

则在 $(-\infty,-6)$ 上 $g(a)>0$，且在 $(2,3)\cup(3,+\infty)$ 上 $g(a)<0$ 均恒成立，

$\therefore g(-6)=8-m\geqslant 0$，且 $g(3)=8-m\leqslant 0$，

$\therefore m=8$. ……10 分

此时 $f(x)-m=x^3-ax^2+4a-8=(x-2)[x^2+(2-a)x-2a+4]=0$.

因为方程 $f(x)=m$ 有三个不相等实根，

$\therefore x^2+(2-a)x-2a+4=0$ 有两个异于 2 的不等实根，

$\therefore \begin{cases} \Delta=(2-a)^2-4(-2a+4)>0, \\ 2^2+2(2-a)-2a+4\neq 0, \end{cases}$

解得 $a\in(-\infty,-6)\cup(2,3)\cup(3,+\infty)$.

综上，所述 $m=8$. ……12 分

22．**解：**（1）设点 $A(\rho,\ \theta)$ 为圆上任一点，则 $|OA|=\rho$，$\angle AOM=\left|\theta-\frac{\pi}{6}\right|$，

在 Rt$\triangle AOM$ 中，$\rho=4\sqrt{3}\cos(\theta-\frac{\pi}{6})$.

$\therefore$ 圆 C 的极坐标方程为 $\rho=4\sqrt{3}\cos(\theta-\frac{\pi}{6})$，$(-\frac{\pi}{3}\leqslant\theta\leqslant\frac{2\pi}{3})$.……5 分

（2）圆 C 左上半圆弧 OM 的三等分点对应的极角分别 $\theta_1=\frac{\pi}{3}$，$\theta_2=\frac{\pi}{2}$.

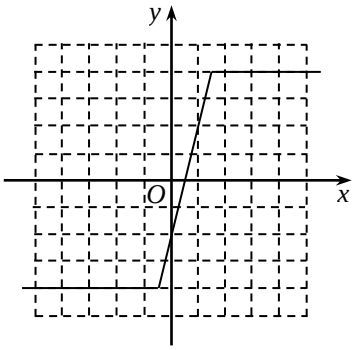
代入圆 C 的极坐标方程中，

$\therefore$ 圆 C 左上半圆弧 OM 的三等分点分别为 $P_1(6,\ \frac{\pi}{3})$，$P_2(2\sqrt{3},\ \frac{\pi}{2})$. ……10 分

23．**解**：（1）由已知条件可得，$f(x)=\begin{cases}4, x\geqslant\frac{3}{2},\\ 4x-2, -\frac{1}{2}<x<\frac{3}{2},\\ -4,\ x\leqslant-\frac{1}{2}.\end{cases}$ ……3 分

作出函数图象如右图.

……5 分



（2）由（1）的图象可得，实数 m 满足 $-\frac{5}{2}<2m-1<\frac{3}{2}$ (或 $-\frac{1}{2}<2m+1<\frac{7}{2}$)，

解得 $-\frac{3}{4}<m<\frac{5}{4}$，

∴ 实数 m 的取值范围为 $(-\frac{3}{4}, \frac{5}{4})$． ……10 分