

绵阳市高中 2018 级第一次诊断性考试

理科数学

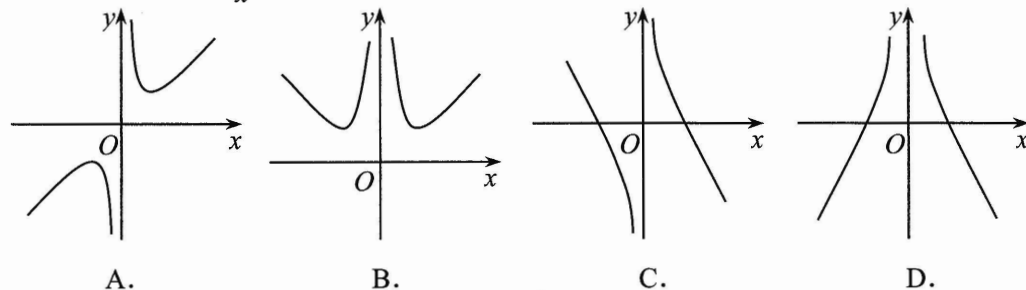
注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将答题卡交回。

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知 $A=\{x|0<x<2\}$, $B=\{x|x(1-x)\geq 0\}$, 则 $A\cap B=$
 A. $\emptyset$ B. $(-\infty, 1]$ C. $[1, 2)$ D. $(0, 1]$
2. 下列函数中，既是奇函数又是增函数的是
 A. $y=\tan x$ B. $y=\ln x$
 C. $y=x^3$ D. $y=x^2$
3. 若 $\log_a b > 1$, 其中 $a > 0$ 且 $a \neq 1$, $b > 1$, 则
 A. $0 < a < 1 < b$ B. $1 < a < b$ C. $1 < b < a$ D. $1 < b < a^2$
4. 函数 $f(x)=\sin(\frac{\pi}{2}x+\frac{\pi}{4})$ 的图象的一条对称轴是
 A. $x=-3$ B. $x=0$ C. $x=\frac{\pi}{2}$ D. $x=-\frac{3}{2}$

5. 函数 $f(x)=x\ln|x|+\frac{2}{x}$ 的大致图象是



6. 已知命题 p : 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $\cos A = \cos B$, 则 $A = B$; 命题 q : 向量 a 与向量 b 相等的充要条件是 $|a| = |b|$ 且 $a \parallel b$. 下列四个命题是真命题的是

- A. $p \wedge (\neg q)$ B. $(\neg p) \wedge (\neg q)$ C. $(\neg p) \wedge q$ D. $p \wedge q$

7. 若曲线 $y = -\sqrt{x+1}$ 在点 $(0, -1)$ 处的切线与曲线 $y = \ln x$ 在点 P 处的切线垂直, 则点 P 的坐标为

- A. $(e, 1)$ B. $(1, 0)$ C. $(2, \ln 2)$ D. $(\frac{1}{2}, -\ln 2)$

8. 已知菱形 $ABCD$ 的对角线相交于点 O , 点 E 为 AO 的中点, 若 $AB=2$, $\angle BAD=60^\circ$, 则 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DE} =$

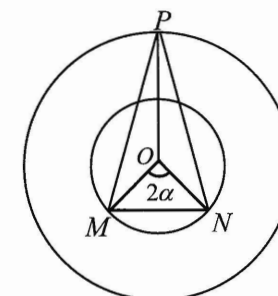
- A. -2 B. $-\frac{1}{2}$ C. $-\frac{7}{2}$ D. $\frac{1}{2}$

9. 若 $a < b < 0$, 则下列不等式中成立的是

- A. $\frac{1}{a-b} > \frac{1}{a}$ B. $a + \frac{1}{b} > b + \frac{1}{a}$
 C. $\frac{b}{a} < \frac{b-1}{a-1}$ D. $(1-a)^a > (1-b)^b$

10. 某城市要在广场中央的圆形地面设计一块浮雕, 彰显城市积极向上的活力. 某公司设计方案如图, 等腰 $\triangle PMN$ 的顶点 P 在半径为 20m 的大 $\odot O$ 上, 点 M, N 在半径为 10m 的小 $\odot O$ 上, 圆心 O 与点 P 都在弦 MN 的同侧. 设弦 MN 与对应劣弧所围成的弓形面积为 S , $\triangle OPM$ 与 $\triangle OPN$ 的面积之和为 S_1 , $\angle MON = 2\alpha$, 当 $S_1 - S$ 的值最大时, 该设计方案最美, 则此时 $\cos \alpha =$

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$



11. 数列 $\{a_n\}$ 满足 $\frac{1}{a_{n+2}} = \frac{2}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n}$, $a_2 = \frac{1}{5}$, $a_4 = \frac{1}{9}$, 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $b_n = a_n a_{n+1}$,

则使不等式 $S_n > \frac{4}{27}$ 成立的 n 的最小值为

- A. 11 B. 12 C. 13 D. 14

12. 若 $2^{a+1} = 3$, $2^b = \frac{8}{3}$, 则以下结论正确的有

- ① $b-a < 1$; ② $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} > 2$; ③ $ab > \frac{3}{4}$; ④ $b^2 > 2a$.
 A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

二、填空题：本大题共4小题，每小题5分，共20分.

13. 已知向量 $a=(1, 0)$, $b=(1, 1)$, 且 $a+\lambda b$ 与 a 垂直, 则实数 $\lambda=$ _____.

14. 若实数 x, y 满足 $\begin{cases} x \geq 0, \\ x \leq y, \\ x+2 \geq 2y, \end{cases}$ 则 $z=2x+y$ 的最大值为_____.

15. 已知 $\sin x + \cos y = \frac{1}{4}$, 则 $\sin x - \sin^2 y$ 的最大值为_____.

16. 若函数 $f(x) = (x^2 + ax + 2a)e^x$ 在区间 $(-2, 1)$ 上恰有一个极值点, 则实数 a 的取值范围为_____.

三、解答题：共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第17~21题为必考题，每个试题考生都必须作答。第22、23题为选考题，考生根据要求作答。

(一) 必考题：共60分。

17. (12分)

已知 S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, $S_3=15$, $a_1 \cdot a_2 = a_7$.

(1) 求 a_n ;

(2) 若 $b_n = 2^{a_n} + (-1)^n \cdot a_n$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

18. (12分)

已知函数 $f(x) = 2\sqrt{3} \cos x \cdot \sin(x + \frac{\pi}{6}) - \frac{\sqrt{3}}{2} (x \in \mathbf{R})$.

(1) 判断函数 $f(x)$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上的单调性;

(2) 将函数 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{1}{4}$ 个周期后得到函数 $g(x)$ 的图象, 求函数 $g(x)$ 在区

间 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上的值域.

19. (12分)

在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $c \sin A = a \cos(C - \frac{\pi}{6})$.

(1) 求角 C 的大小;

(2) 若 $\cos B = -\frac{1}{7}$, $c = 7$, 求 AB 边上的高.

理科数学试题 第3页 (共4页)

20. (12分)

已知函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 当 $x < 0$ 时, $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x} + 1$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的解析式;

(2) 若对于任意实数 x , 不等式 $f(e^{2x}) + 2af(e^x) \geq 0$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围.

21. (12分)

已知函数 $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{a+4}{2}x^2 + 2ax + 2 (a \in \mathbf{R})$.

(1) 若函数 $f(x)$ 在 $(0, 2)$ 上有唯一零点, 求 a 的取值范围;

(2) 当 $0 < a < \frac{4}{3}$ 时, 求证: 对任意的 $x_1, x_2 \in [0, \frac{5}{2}]$, 都有 $|f(x_1) - f(x_2)| < \frac{8}{3}$.

(二) 选考题：共10分。请考生在第22、23题中任选一题作答。如果多做，则按所做的第一题记分。

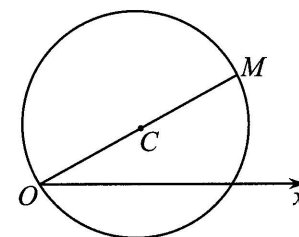
22. [选修4-4：坐标系与参数方程] (10分)

在极坐标系中, O 为极点, 如图所示, 已知 $M(4\sqrt{3}, \frac{\pi}{6})$,

以 OM 为直径作圆 C .

(1) 求圆 C 的极坐标方程;

(2) 若 P 为圆 C 左上半圆弧 $\widehat{OM}$ 的三等分点, 求 P 点的极坐标.

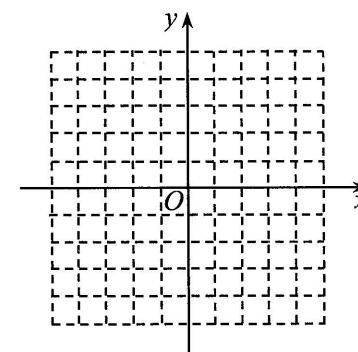


23. [选修4-5：不等式选讲] (10分)

已知函数 $f(x) = |2x+1| - |2x-3|$.

(1) 在如右的网格图中画出函数 $f(x)$ 的图象;

(2) 若实数 m 满足 $f(2m-1) < f(2m+1)$, 求 m 的取值范围.



理科数学试题 第4页 (共4页)

绵阳市高中 2018 级第一次诊断性考试

理科数学参考答案及评分意见

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分.

DCBDA ADBCB CD

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. -1 14. 6 15. $\frac{9}{16}$ 16. $(-\frac{3}{4}, 0]$

三、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分.

17. 解：（1）设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d .

$$\because S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = 3a_2 = 15, \text{ 得 } a_2 = 5.$$

$$\text{又 } a_1 \cdot a_2 = a_7, \text{ 得 } (a_2 - d) \cdot a_2 = a_2 + 5d, \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$\text{即 } 5(5 - d) = 5 + 5d,$$

解得 $d = 2$.

$$\therefore a_n = a_2 + (n - 2) \times 2 = 2n + 1. \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$(2) \text{ 由题意得 } b_n = 2^{2n+1} + (-1)^n \cdot (2n+1) = 2 \times 4^n + (-1)^n \cdot (2n+1),$$

$$\therefore T_n = 2(4^1 + 4^2 + \dots + 4^n) + [-3 + 5 - 7 + 9 - \dots + (-1)^n(2n+1)]$$

$$= \frac{8(4^n - 1)}{3} + G_n. \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$\text{当 } n = 2k (k \in \mathbf{N}^*) \text{ 时, } G_n = 2 \times \frac{n}{2} = n,$$

$$\therefore T_n = \frac{8(4^n - 1)}{3} + n.$$

$$\text{当 } n = 2k - 1 (k \in \mathbf{N}^*) \text{ 时, } G_n = 2 \times \frac{n-1}{2} - (2n+1) = -n - 2,$$

$$\therefore T_n = \frac{8(4^n - 1)}{3} - n - 2,$$

$$\therefore T_n = \begin{cases} \frac{8(4^n - 1)}{3} + n & (n = 2k, k \in \mathbf{N}^*), \\ \frac{8(4^n - 1)}{3} - n - 2 & (n = 2k - 1, k \in \mathbf{N}^*). \end{cases} \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

18. 解: (1) $f(x) = 2\sqrt{3}\cos x \cdot \sin(x + \frac{\pi}{6}) - \frac{\sqrt{3}}{2}$
 $= 2\sqrt{3}\cos x(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x) - \frac{\sqrt{3}}{2}$
 $= 3\sin x \cos x + \sqrt{3}\cos^2 x - \frac{\sqrt{3}}{2}$
 $= \frac{3}{2}\sin 2x + \sqrt{3} \times \frac{1 + \cos 2x}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$
 $= \sqrt{3}\sin(2x + \frac{\pi}{6}). \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$

由 $2k\pi - \frac{\pi}{2} \leq 2x + \frac{\pi}{6} \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbf{Z})$ 可得

$$k\pi - \frac{\pi}{3} \leq x \leq k\pi + \frac{\pi}{6} (k \in \mathbf{Z}),$$

即当 $x \in [k\pi - \frac{\pi}{3}, k\pi + \frac{\pi}{6}] (k \in \mathbf{Z})$ 时, 函数 $f(x)$ 单调递增,

同理可得: 当 $x \in [k\pi + \frac{\pi}{6}, k\pi + \frac{2\pi}{3}] (k \in \mathbf{Z})$ 时, 函数 $f(x)$ 单调递减,

又 $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$,

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在 $[0, \frac{\pi}{6}]$ 上单调递增, $f(x)$ 在 $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}]$ 上单调递减. $\dots\dots\dots 8 \text{ 分}$

(2) 由题意得 $g(x) = \sqrt{3}\sin[2(x - \frac{\pi}{4}) + \frac{\pi}{6}] = \sqrt{3}\sin(2x - \frac{\pi}{3}).$

$$\because 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2},$$

$$\therefore -\frac{\pi}{3} \leq 2x - \frac{\pi}{3} \leq \frac{2\pi}{3},$$

$$\therefore \sqrt{3}\sin(2x - \frac{\pi}{3}) \in [-\frac{\sqrt{3}}{2}, 1],$$

$$\therefore g(x) \in [-\frac{3}{2}, \sqrt{3}]. \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

19. 解: (1) 在 $\triangle ABC$ 中, 由正弦定理得 $\sin C \sin A = \sin A \cos(C - \frac{\pi}{6}),$

$$\because 0 < A < \pi$$

$$\therefore \sin A \neq 0,$$

$$\therefore \sin C = \cos(C - \frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos C + \frac{1}{2}\sin C,$$

即 $\sin C = \sqrt{3} \cos C$, 得 $\tan C = \sqrt{3}$.

$\because 0 < C < \pi$,

$\therefore C = \frac{\pi}{3}$6 分

(2) 由题意得 $\sin B = \sqrt{1 - \cos^2 B} = \frac{4\sqrt{3}}{7}$.

在 $\triangle ABC$ 中, 由正弦定理得 $AC = \frac{AB \cdot \sin B}{\sin C} = 8$8 分

$$\sin A = \sin(B + \frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2} \sin B + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos B = \frac{3\sqrt{3}}{14},$$

$\therefore AB$ 边上的高 $h = AC \cdot \sin A = \frac{12\sqrt{3}}{7}$12 分

20. 解: (1) 当 $x=0$ 时, $f(x)=0$;

$$\text{当 } x>0 \text{ 时, } f(x) = -f(-x) = -\left[\frac{(-x)^2+1}{-x} + 1\right] = \frac{x^2+1}{x} - 1;$$

$$\text{综上, 所述 } f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+1}{x} - 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ \frac{x^2+1}{x} + 1, & x < 0. \end{cases} \text{5 分}$$

(2) 不等式 $f(e^{2x}) + 2af(e^x) \geq 0$,

$$\text{等价于 } e^{2x} + \frac{1}{e^{2x}} - 1 + 2a(e^x + \frac{1}{e^x} - 1) \geq 0,$$

$$\text{等价于 } (e^x + \frac{1}{e^x})^2 - 3 + 2a(e^x + \frac{1}{e^x} - 1) \geq 0. \text{8 分}$$

$$\text{令 } t = e^x + \frac{1}{e^x} \in [2, +\infty).$$

由题意得关于 t 的不等式 $t^2 + 2a(t-1) - 3 \geq 0$ 恒成立,

$$\text{即 } 2a \geq -\frac{t^2-3}{t-1}, \text{ 令 } g(t) = -\frac{t^2-3}{t-1} = -(t-1) + \frac{2}{t-1} - 2, \text{10 分}$$

易得函数 $g(t)$ 在区间 $[2, +\infty)$ 上单调递减,

$$\therefore 2a \geq g(2) = -1,$$

$$\therefore a \geq -\frac{1}{2}. \text{12 分}$$

21. 解: (1) $f'(x) = 2x^2 - (a+4)x + 2a = 2(x - \frac{a}{2})(x - 2)$.

①当 $a \geq 4$ 时, $f'(x) > 0$ 在 $(0, 2)$ 上恒成立,

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在 $(0, 2)$ 上单调递增,

又 $f(0) = 2 > 0$,

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在 $(0, 2)$ 上无零点. 2 分

②当 $0 < a < 4$ 时, 易知函数 $f(x)$ 在 $(0, \frac{a}{2})$ 上单调递增, 在 $(\frac{a}{2}, 2)$ 上单调递减.

要使函数 $f(x)$ 在 $(0, 2)$ 上有唯一零点,

则 $f(2) = 2a - \frac{2}{3} < 0$, 即 $a < \frac{1}{3}$.

$\therefore 0 < a < \frac{1}{3}$.

③当 $a \leq 0$ 时, $f'(x) < 0$ 在 $(0, 2)$ 上恒成立,

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在 $(0, 2)$ 上单调递减.

又 $f(0) = 2 > 0$, $f(2) = 2a - \frac{2}{3} < 0$,

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在 $(0, 2)$ 上有唯一零点.

综上, 所述实数 a 的取值范围为 $a < \frac{1}{3}$ 6 分

(2) 由 (1) 得函数 $f(x)$ 在 $(0, \frac{a}{2})$ 上单调递增,

在 $(\frac{a}{2}, 2)$ 上单调递减, 在 $(2, \frac{5}{2})$ 上单调递增.

$f(0) = 2 > 0$, 极小值 $f(2) = 2a - \frac{2}{3}$,

极大值 $f(\frac{a}{2}) = -\frac{1}{24}a^3 + \frac{1}{2}a^2 + 2$, $f(\frac{5}{2}) = \frac{15}{8}a - \frac{1}{12}$ 8 分

当 $x_1, x_2 \in [0, \frac{5}{2}]$ 时, $|f(x_1) - f(x_2)|_{\max} = \{f(\frac{a}{2}), f(\frac{5}{2})\}_{\max} - f(2)$.

令 $g(a) = f(\frac{a}{2}) - f(2) = -\frac{1}{24}a^3 + \frac{1}{2}a^2 - 2a + \frac{8}{3} (0 < a < \frac{4}{3})$,

则 $g'(a) = -\frac{1}{8}a^2 + a - 2 = -\frac{1}{8}(a - 4)^2 < 0$,

$\therefore g(a)$ 在 $(0, \frac{4}{3})$ 上单调递减,

$\therefore g(a) < g(0) = \frac{8}{3}$ 10 分

令 $h(a) = f(\frac{5}{2}) - f(2) = -\frac{1}{8}a + \frac{7}{12}$, 显然 $h(a)$ 在 $(0, \frac{4}{3})$ 上单调递减,

$\therefore h(a) < h(0) = \frac{7}{12} < \frac{8}{3}$.

综上, 当 $0 < a < \frac{4}{3}$ 时, 对任意的 $x_1, x_2 \in [0, \frac{5}{2}]$,

都有 $|f(x_1) - f(x_2)| < \frac{8}{3}$ 12 分

22. 解: (1) 设点 $A(\rho, \theta)$ 为圆上任一点, 则 $|OA| = \rho$, $\angle AOM = \left| \theta - \frac{\pi}{6} \right|$,

在 $\text{Rt}\triangle AOM$ 中, $\rho = 4\sqrt{3}\cos(\theta - \frac{\pi}{6})$.

$\therefore$ 圆 C 的极坐标方程为 $\rho = 4\sqrt{3}\cos(\theta - \frac{\pi}{6})$, $(-\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{2\pi}{3})$ 5 分

(2) 圆 C 左上半圆弧 OM 的三等分点对应的极角分别 $\theta_1 = \frac{\pi}{3}$, $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$.

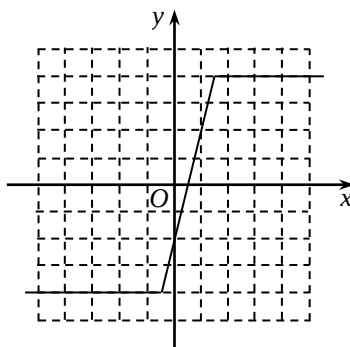
代入圆 C 的极坐标方程中,

$\therefore$ 圆 C 左上半圆弧 OM 的三等分点分别为 $P_1(6, \frac{\pi}{3})$, $P_2(2\sqrt{3}, \frac{\pi}{2})$ 10 分

23. 解: (1) 由已知条件可得, $f(x) = \begin{cases} 4, & x \geq \frac{3}{2}, \\ 4x - 2, & -\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}, \\ -4, & x \leq -\frac{1}{2}. \end{cases}$ 3 分

作出函数图象如右图.

..... 5 分



(2) 由 (1) 的图象可得, 实数 m 满足 $-\frac{5}{2} < 2m-1 < \frac{3}{2}$ (或 $-\frac{1}{2} < 2m+1 < \frac{7}{2}$),

解得 $-\frac{3}{4} < m < \frac{5}{4}$,

$\therefore$ 实数 m 的取值范围为 $(-\frac{3}{4}, \frac{5}{4})$ 10 分