

# 文科数学

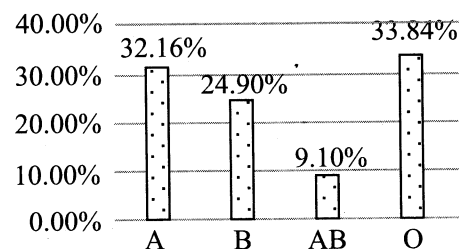
## 注意事项:

1. 答卷前, 考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时, 选出每小题答案后, 用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其它答案标号。回答非选择题时, 将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后, 将答题卡交回。

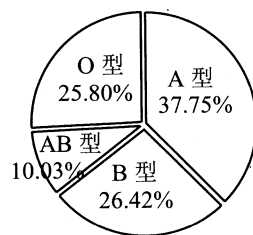
一、选择题: 本大题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 复数  $\frac{2}{1-i} =$   
A.  $1+i$  B.  $1-i$  C.  $2-2i$  D.  $2+2i$
2. 设集合  $A=\{(x, y) | x^2+y^2=1\}$ ,  $B=\{(x, y) | x+y=1\}$ , 则  $A \cap B$  中元素的个数是  
A. 0 B. 1 C. 2 D. 3
3. 已知单位向量  $a, b$  满足  $a \perp b$ , 则  $a \cdot (a-b) =$   
A. 0 B.  $\frac{1}{2}$  C. 1 D. 2
4. 有报道称, 据南方科技大学、上海交大等 8 家单位的最新研究显示: A、B、O、AB 血型与 COVID-19 易感性存在关联, 具体调查数据统计如下:

武汉市 3694 名正常人血型占比



武汉市 1775 名 COVID-19 患者血型占比



根据以上调查数据, 下列说法错误的是

- A. 与非 O 型血相比, O 型血人群对 COVID-19 相对不易感, 风险较低
- B. 与非 A 型血相比, A 型血人群对 COVID-19 相对易感, 风险较高
- C. 与 O 型血相比, B 型、AB 型血人群对 COVID-19 的易感性要高
- D. 与 A 型血相比, 非 A 型血人群对 COVID-19 都不易感, 没有风险

5. 若实数  $x$  满足  $x \cdot \log_3 2 = 1$ , 则  $4^x =$

A. 4 B. 6 C.  $4^{\log_3 2}$  D. 9

6. 已知在  $\triangle ABC$  中,  $\sin B = 2 \sin A \cos C$ , 则  $\triangle ABC$  一定是

A. 锐角三角形 B. 直角三角形  
C. 等腰三角形 D. 钝角三角形

7. 数学与建筑的结合造就建筑艺术品, 2018 年南非双曲线大教堂面世便惊艳世界, 如图. 若将此大教堂外形弧线的一段近似看成焦点在  $y$  轴上的双曲线  $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  上支的一部分, 且上焦点到上顶点的距离为 2, 到渐近线距离为  $2\sqrt{2}$ , 则此双曲线的离心率为



A. 2 B. 3 C.  $2\sqrt{2}$  D.  $2\sqrt{3}$

8. 已知定义在  $\mathbf{R}$  上的奇函数  $f(x)$  满足  $f(x+2) = -f(x)$ , 若  $f(-1) < 1$ ,  $f(2019) = \ln(a-1)$ , 则实数  $a$  的取值范围为

A.  $(1, 2)$  B.  $(-\infty, e+1)$  C.  $(e+1, +\infty)$  D.  $(1, e+1)$

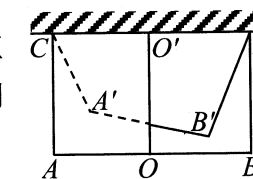
9. 某社区有 3 个防疫志愿者服务队, 每位社区居民参加每个服务队的可能性相同, 该社区的甲、乙两位居民均参加其中一个服务队, 则这两位居民参加不同服务队的概率为

A.  $\frac{2}{3}$  B.  $\frac{1}{2}$  C.  $\frac{1}{3}$  D.  $\frac{1}{6}$

10. 已知函数  $f(x) = \sin(\omega x + \varphi) (\omega > 0, 0 < \varphi < \frac{\pi}{2})$  的最小正周期为  $\pi$ , 且关于  $(-\frac{\pi}{8}, 0)$  中心对称, 则下列结论正确的是

A.  $f(0) < f(2) < f(1)$  B.  $f(2) < f(1) < f(0)$   
C.  $f(2) < f(0) < f(1)$  D.  $f(1) < f(0) < f(2)$

11. 如图, 教室里悬挂着日光灯管  $AB$ ,  $AB=90\text{cm}$ , 灯线  $AC=BD$ , 将灯管  $AB$  绕着过  $AB$  中点  $O$  的铅垂线  $OO'$  顺时针旋转  $60^\circ$  至  $A'B'$ , 且始终保持灯线绷紧, 若旋转后该灯管升高了  $15\text{cm}$ , 则  $AC$  的长为



A. 30cm B. 40cm  
C. 60cm D. 75cm

12. 已知  $x$  为实数,  $[x]$  表示不超过  $x$  的最大整数, 若函数  $f(x) = x - [x]$ , 则函数

$g(x) = f(x) + \frac{x}{e^x}$  的零点个数为

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 已知  $\cos \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{5}}{5}$ , 则  $\sin \alpha =$  \_\_\_\_\_.

14. 曲线  $y=2x-x^3$  在  $x=-1$  处的切线方程为\_\_\_\_\_.

15. 已知  $F_1, F_2$  是椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的两个焦点,  $P$  是椭圆  $C$  上的一点,

若  $\angle F_1PF_2 = 120^\circ$ , 且  $\triangle F_1PF_2$  的面积为  $4\sqrt{3}$ , 则  $b =$ \_\_\_\_\_.

16. 在一个半径为 2 的钢球内放置一个用来盛特殊液体的正四棱柱容器, 要使该容器所盛液体尽可能多, 则该容器的高应为\_\_\_\_\_.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17~21 题为必考题, 每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题, 考生根据要求作答。

(一) 必考题：共 60 分。

17. (12 分)

质量是企业的生命线。某企业在一个批次产品中随机抽检  $n$  件, 并按质量指标值进行统计分析, 得到表格如下:

| 质量指标值      | 等级  | 频数  | 频率  |
|------------|-----|-----|-----|
| [60, 75)   | 三等品 | 10  | 0.1 |
| [75, 90)   | 二等品 | 30  | $b$ |
| [90, 105)  | 一等品 | $a$ | 0.4 |
| [105, 120) | 特等品 | 20  | 0.2 |
| 合计         |     | $n$ | 1   |

(1) 求  $a, b, n$ ;

(2) 从质量指标值在  $[90, 120)$  的产品中, 按照等级分层抽样抽取 6 件, 再从这 6 件中随机抽取 2 件, 求至少有 1 件特等品被抽到的概率。

18. (12 分)

若数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 已知  $a_1 = 1, a_{n+1} = 2S_n (n \in \mathbf{N}^*)$ .

(1) 求  $S_n$ ;

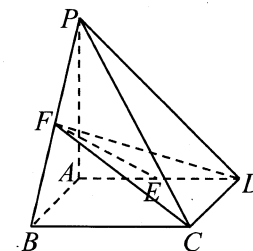
(2) 设  $b_n = \log_3 S_n$ , 求使得  $\frac{1}{b_2 b_3} + \frac{1}{b_3 b_4} + \frac{1}{b_4 b_5} + \cdots + \frac{1}{b_{n+1} b_{n+2}} > 0.99$  成立的最小自然数  $n$ .

19. (12 分)

如图, 四边形  $ABCD$  是正方形,  $PA \perp$  平面  $ABCD$ , 点  $E$ 、点  $F$  分别是线段  $AD$ 、 $PB$  的中点,  $PA = AB = 2$ .

(1) 证明:  $EF \parallel$  平面  $PCD$ ;

(2) 求三棱锥  $F-PCD$  的体积.



20. (12 分)

已知动直线  $l$  过抛物线  $C: y^2 = 4x$  的焦点  $F$ , 且与抛物线  $C$  交于  $M, N$  两点, 且点  $M$  在  $x$  轴上方,  $O$  为坐标原点, 线段  $MN$  的中点为  $G$ .

(1) 若直线  $OG$  的斜率为  $\frac{2}{3}$ , 求直线  $l$  的方程;

(2) 设点  $P(x_0, 0)$ , 若  $\angle FMP$  恒为锐角, 求  $x_0$  的取值范围.

21. (12 分)

已知函数  $f(x) = ax - (a+2)\ln x - \frac{2}{x} + 2$ , 其中  $a \in \mathbf{R}$ .

(1) 当  $a=4$  时, 求函数  $f(x)$  的极值;

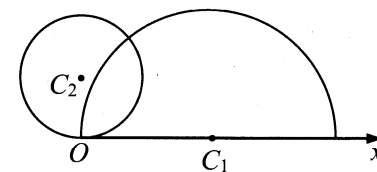
(2) 若  $0 < a < 2$ , 试讨论函数  $f(x)$  在  $(1, e)$  上的零点个数.

(二) 选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答。如果多做, 则按所做的第一题记分。

22. [选修 4-4: 坐标系与参数方程] (10 分)

如图, 在极坐标系中, 曲线  $C_1$  是以  $C_1(4, 0)$  为圆心

的半圆, 曲线  $C_2$  是以  $C_2(\sqrt{3}, \frac{\pi}{2})$  为圆心的圆, 曲线  $C_1, C_2$  都过极点  $O$ .



(1) 分别写出半圆  $C_1$ , 圆  $C_2$  的极坐标方程;

(2) 直线  $l: \theta = \frac{\pi}{3} (\rho \in \mathbf{R})$  与曲线  $C_1, C_2$  分别交于  $M, N$  两点 (异于极点  $O$ ),  $P$  为  $C_2$

上的动点, 求  $\triangle PMN$  面积的最大值.

23. [选修 4-5: 不等式选讲] (10 分)

已知函数  $f(x) = |x-2| + |x+1|$ .

(1) 解关于  $x$  的不等式  $f(x) \leq 5$ ;

(2) 若函数  $f(x)$  的最小值记为  $m$ , 设  $a, b, c$  均为正实数, 且  $a+4b+9c=m$ , 求

$\frac{1}{a} + \frac{1}{4b} + \frac{1}{9c}$  的最小值.