

理科数学

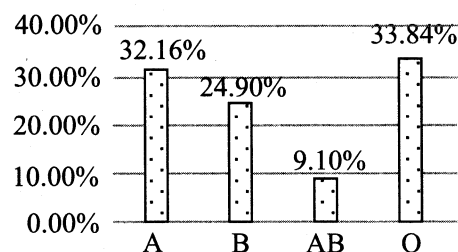
注意事项:

- 答卷前, 考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
- 回答选择题时, 选出每小题答案后, 用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其它答案标号。回答非选择题时, 将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
- 考试结束后, 将答题卡交回。

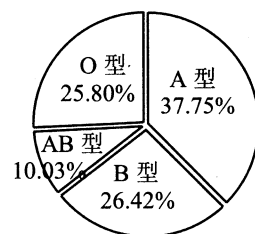
一、选择题: 本大题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

- 设集合 $A=\{(x, y) | x^2 + y^2 = 1\}$, $B=\{(x, y) | x+y=1\}$, 则 $A \cap B$ 中元素的个数是
A. 0 B. 1 C. 2 D. 3
- 已知复数 z 满足 $(1-i) \cdot z = |\sqrt{3} + i|$, 则 $z =$
A. $1-i$ B. $1+i$ C. $2-2i$ D. $2+2i$
- 已知 $x \cdot \log_3 2 = 1$, 则 $4^x =$
A. 4 B. 6 C. $4^{\log_3 2}$ D. 9
- 有报道称, 据南方科技大学、上海交大等 8 家单位的最新研究显示: A、B、O、AB 血型与 COVID-19 易感性存在关联, 具体调查数据统计如下:

武汉市 3694 名正常人血型占比



武汉市 1775 名 COVID-19 患者血型占比



根据以上调查数据, 则下列说法错误的是

- 与非 O 型血相比, O 型血人群对 COVID-19 相对不易感, 风险较低
- 与非 A 型血相比, A 型血人群对 COVID-19 相对易感, 风险较高
- 与 A 型血相比, 非 A 型血人群对 COVID-19 都不易感, 没有风险
- 与 O 型血相比, B 型、AB 型血人群对 COVID-19 的易感性要高

- 在二项式 $(x - \frac{2}{x})^n$ 的展开式中, 仅第四项的二项式系数最大, 则展开式中常数项为
A. -360 B. -160 C. 160 D. 360

- 已知在 $\triangle ABC$ 中, $\sin B = 2\sin A \cos C$, 则 $\triangle ABC$ 一定是
A. 锐角三角形 B. 等腰三角形
C. 直角三角形 D. 钝角三角形

- 已知两个单位向量 a, b 的夹角为 120° , 若向量 $c = 2a - b$, 则 $a \cdot c =$

- $\frac{5}{2}$ B. $\frac{3}{2}$ C. 2 D. 3

- 数学与建筑的结合造就建筑艺术品, 2018 年南非双曲线大教堂面世便惊艳世界, 如图. 若将此大教堂外形弧线的一段近似看成焦点在 y 轴上的双曲线 $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 上支的一部分, 且上焦点到上顶点的距离为 2, 到渐近线距离为 $2\sqrt{2}$, 则此双曲线的离心率为



- 2 B. $2\sqrt{2}$ C. 3 D. $2\sqrt{3}$

- 设函数 $f(x) = \begin{cases} 2^x + 1, & x > 0, \\ -2^{-x} - 1, & x < 0, \end{cases}$ 则下列结论错误的是

- 函数 $f(x)$ 的值域为 $\mathbf{R}$ B. 函数 $f(|x|)$ 为偶函数
C. 函数 $f(x)$ 为奇函数 D. 函数 $f(x)$ 是定义域上的单调函数

- 已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi) (\omega > 0, 0 < \varphi < \frac{\pi}{2})$ 的最小正周期为 π , 且关于 $(-\frac{\pi}{8}, 0)$ 中心对称, 则下列结论正确的是

- $f(1) < f(0) < f(2)$ B. $f(0) < f(2) < f(1)$
C. $f(2) < f(0) < f(1)$ D. $f(2) < f(1) < f(0)$

- 已知 x 为实数, $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数, 若函数 $f(x) = x - [x]$, 则函数

$$g(x) = f(x) + \frac{x}{e^x} \text{ 的零点个数为}$$

- 1 B. 2 C. 3 D. 4

- 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $AB = 2$, $AC = \sqrt{3}$, D 为 AC 上的一点(不含端点), 将 $\triangle BCD$ 沿直线 BD 折起, 使点 C 在平面 ABD 上的射影 O 在线段 AB 上, 则线段 OB 的取值范围是

- $(\frac{1}{2}, 1)$ B. $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ C. $(\frac{\sqrt{3}}{2}, 1)$ D. $(0, \frac{\sqrt{3}}{2})$

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 已知 $\cos \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{5}}{5}$, 则 $\sin \alpha =$ _____.

14. 若曲线 $f(x) = e^x \cos x - mx$, 在点 $(0, f(0))$ 处的切线的倾斜角为 $\frac{3\pi}{4}$, 则实数 $m =$ _____.

15. 已知 F_1, F_2 是椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的两个焦点, P 是椭圆 C 上的一点,

若 $\angle F_1 P F_2 = 120^\circ$, 且 $\triangle F_1 P F_2$ 的面积为 $4\sqrt{3}$, 则 $b =$ _____.

16. 在一个半径为 2 的钢球内放置一个用来盛特殊液体的正四棱柱容器, 要使该容器所盛液体尽可能多, 则该容器的高应为 _____.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

(一) 必考题：共 60 分。

17. (12 分)

若数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 已知 $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{2}{3} S_n$.

(1) 求 S_n ;

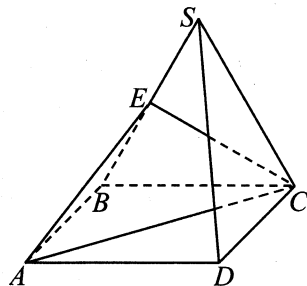
(2) 设 $b_n = \frac{1}{S_n}$, 求证: $b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n < \frac{5}{2}$.

18. (12 分)

如图, 已知点 S 为正方形 $ABCD$ 所在平面外一点, $\triangle SBC$ 是边长为 2 的等边三角形, 点 E 为线段 SB 的中点.

(1) 证明: $SD \parallel$ 平面 AEC ;

(2) 若侧面 $SBC \perp$ 底面 $ABCD$, 求平面 ACE 与平面 SCD 所成锐二面角的余弦值.



19. (12 分)

2020 年 3 月, 各行各业开始复工复产, 生活逐步恢复常态, 某物流公司承担从甲地到乙地的蔬菜运输业务. 已知该公司统计了往年同期 200 天内每天配送的蔬菜量 X ($40 \leq X < 200$, 单位: 件. 注: 蔬菜全部用统一规格的包装箱包装), 并分组统计得到表格如下:

蔬菜量 X	[40, 80)	[80, 120)	[120, 160)	[160, 200)
天数	25	50	100	25

若将频率视为概率, 试解答如下问题:

理科数学试题 第 3 页 (共 4 页)

(1). 该物流公司负责人决定随机抽出 3 天的数据来分析配送的蔬菜量的情况, 求这 3 天配送的蔬菜量中至多有 2 天小于 120 件的概率;

(2) 该物流公司拟一次性租赁一批货车专门运营从甲地到乙地的蔬菜运输. 已知一辆货车每天只能运营一趟, 每辆货车每趟最多可装载 40 件, 满载才发车, 否则不发车. 若发车, 则每辆货车每趟可获利 2000 元; 若未发车, 则每辆货车每天平均亏损 400 元. 为使该物流公司此项业务的营业利润最大, 该物流公司应一次性租赁几辆货车?

20. (12 分)

已知函数 $f(x) = ax - (a+2)\ln x - \frac{2}{x} + 2$, 其中 $a \in \mathbf{R}$.

(1) 当 $a=4$ 时, 求函数 $f(x)$ 的极值;

(2) 试讨论函数 $f(x)$ 在 $(1, e)$ 上的零点个数.

21. (12 分)

已知动直线 l 过抛物线 $C: y^2 = 4x$ 的焦点 F , 且与抛物线 C 交于 M, N 两点, 且点 M 在 x 轴上方.

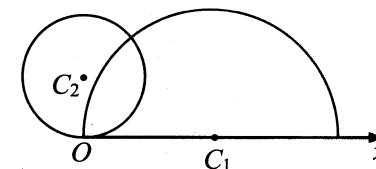
(1) 若线段 MN 的垂直平分线交 x 轴于点 Q , 若 $|FQ| = 8$, 求直线 l 的斜率;

(2) 设点 $P(x_0, 0)$, 若点 M 恒在以 FP 为直径的圆外, 求 x_0 的取值范围.

(二) 选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答。如果多做，则按所做的第一题记分。

22. [选修 4-4: 坐标系与参数方程] (10 分)

如图, 在极坐标系中, 曲线 C_1 是以 $C_1(4, 0)$ 为圆心的半圆, 曲线 C_2 是以 $C_2(\sqrt{3}, \frac{\pi}{2})$ 为圆心的圆, 曲线 C_1, C_2 都过极点 O .



(1) 分别写出半圆 C_1 、圆 C_2 的极坐标方程;

(2) 直线 $l: \theta = \frac{\pi}{3} (\rho \in \mathbf{R})$ 与曲线 C_1, C_2 分别交于 M, N 两点 (异于极点 O), P 为 C_2 上的动点, 求 $\triangle PMN$ 面积的最大值.

23. [选修 4-5: 不等式选讲] (10 分)

已知函数 $f(x) = |x-2| + |x+1|$.

(1) 解关于 x 的不等式 $f(x) \leq 5$;

(2) 若函数 $f(x)$ 的最小值记为 m , 设 a, b, c 均为正实数, 且 $a+4b+9c=m$, 求

$\frac{1}{a} + \frac{1}{4b} + \frac{1}{9c}$ 的最小值.

理科数学试题 第 4 页 (共 4 页)