

成都市 2017 级高中毕业班第二次诊断性检测

数学(文科)参考答案及评分意见

第 I 卷 (选择题, 共 60 分)

一、选择题:(每小题 5 分, 共 60 分)

1. C; 2. A; 3. B; 4. D; 5. C; 6. B; 7. B; 8. C; 9. B; 10. A; 11. D; 12. D.

第 II 卷 (非选择题, 共 90 分)

二、填空题:(每小题 5 分, 共 20 分)

13. 2; 14. $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 15. 1; 16. 36.

三、解答题:(共 70 分)

17. 解:(I) 设数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q . 由题意及 $a_1 = 1$, 知 $q > 1$.

$$\because 2a_2, \frac{3}{2}a_3, a_4 \text{ 成等差数列}, \therefore 3a_3 = a_4 + 2a_2.$$

$$\therefore 3q^2 = q^3 + 2q, \text{ 即 } q^2 - 3q + 2 = 0.$$

.....2 分

$$\text{解得 } q = 2 \text{ 或 } q = 1 (\text{舍去}).$$

.....4 分

$$\therefore q = 2.$$

.....5 分

$$\therefore \text{数列 } \{a_n\} \text{ 的通项公式为 } a_n = 2^{n-1}.$$

.....6 分

$$(II) \because b_n = \frac{1}{\log_2 a_{n+1} \cdot \log_2 a_{n+2}} = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1},$$

.....9 分

$$\therefore S_n = (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + \dots + (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1})$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1}$$

.....11 分

$$= \frac{n}{n+1}.$$

.....12 分

18. 解:(I) $\because ABCD$ 是正方形, $\therefore AC \perp BD$1 分

$$\because PO \perp \text{平面 } ABCD, AC \subset \text{平面 } ABCD,$$

$$\therefore PO \perp AC.$$

.....2 分

$$\because OP, BD \subset \text{平面 } PBD, \text{ 且 } OP \cap BD = O,$$

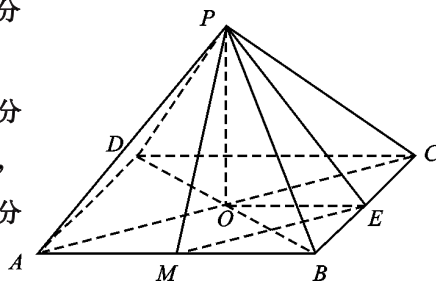
$$\therefore AC \perp \text{平面 } PBD.$$

.....5 分

$$\text{又 } AC \subset \text{平面 } PAC,$$

$$\therefore \text{平面 } PAC \perp \text{平面 } PBD.$$

.....7 分



(II) 设三棱锥 $P-BEM$ 的高为 h .

$$\therefore V_{B-PEM} = V_{P-BEM} = \frac{1}{3} S_{\triangle BEM} \times h. \quad \dots\dots 8 \text{ 分}$$

连接 OE . $\because PO \perp$ 平面 $ABCD$, $OE \subset$ 平面 $ABCD$,

$\therefore PO \perp OE$.

$$\because OE = 2, PE = 3, \therefore h = OP = \sqrt{5}. \quad \dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\therefore V_{P-BEM} = \frac{1}{3} S_{\triangle BEM} \cdot h = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times \sqrt{5} = \frac{2\sqrt{5}}{3}. \quad \dots\dots 12 \text{ 分}$$

19. 解: (I) 根据表中数据, 计算可得 $\bar{x} = 4, \bar{y} = 43, \sum_{i=1}^7 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = 140$. $\dots\dots 3 \text{ 分}$

$$\text{又 } \sum_{i=1}^7 (x_i - \bar{x})^2 = 28, \therefore \hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^7 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^7 (x_i - \bar{x})^2} = 5. \quad \dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$\therefore \hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}, \therefore \hat{a} = 43 - 5 \times 4 = 23. \quad \dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$\therefore y \text{ 关于 } x \text{ 的线性回归方程为 } \hat{y} = 5x + 23. \quad \dots\dots 7 \text{ 分}$$

将 $x = 8$ 代入, $\therefore \hat{y} = 5 \times 8 + 23 = 63$ (亿元).

$\therefore$ 该公司 2020 年的年利润的预测值为 63 亿元. $\dots\dots 8 \text{ 分}$

(II) 由 (I) 可知 2015 年至 2020 年的年利润的估计值分别为 38, 43, 48, 53, 58, 63 (单位: 亿元), 其中实际利润大于相应估计值的有 2 年.

故这 6 年中, 被评为 A 级利润年的有 2 年, 分别记为 A_1, A_2 ; 评为 B 级利润年的有 4 年, 分别记为 B_1, B_2, B_3, B_4 . $\dots\dots 9 \text{ 分}$

从 2015 至 2020 年中随机抽取 2 年, 总的情况分别为:

$A_1A_2, A_1B_1, A_1B_2, A_1B_3, A_1B_4, A_2B_1, A_2B_2, A_2B_3, A_2B_4, B_1B_2, B_1B_3, B_1B_4, B_2B_3, B_2B_4, B_3B_4$.

共计 15 种情况. $\dots\dots 10 \text{ 分}$

其中恰有一年为 A 级利润年的情况分别为: $A_1B_1, A_1B_2, A_1B_3, A_1B_4, A_2B_1, A_2B_2, A_2B_3, A_2B_4$.

共有 8 种情况. $\dots\dots 11 \text{ 分}$

记“从 2015 至 2020 年这 6 年的年利润中随机抽取 2 年, 恰有一年为 A 级利润年”的概率为 P .

$$\text{故所求概率 } P = \frac{8}{15}. \quad \dots\dots 12 \text{ 分}$$

20. 解: (I) $\because P(1, \frac{\sqrt{2}}{2})$ 在椭圆上, $\therefore |PF_1| + |PF_2| = 2a$.

$$\text{又 } |PF_1| = \sqrt{4 + \frac{1}{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}, |PF_2| = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\therefore |PF_1| + |PF_2| = 2\sqrt{2}, \text{ 则 } a = \sqrt{2}. \quad \dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$\because c = 1, b^2 = a^2 - c^2, \therefore b = 1.$$

$$\text{故所求椭圆 } E \text{ 的标准方程为 } \frac{x^2}{2} + y^2 = 1. \quad \dots\dots 4 \text{ 分}$$

(II) 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$.

$$\text{联立 } \begin{cases} x = my + 1 \\ x^2 + 2y^2 = 2 \end{cases}, \text{ 消去 } x, \text{ 得 } (m^2 + 2)y^2 + 2my - 1 = 0.$$

$$\therefore \Delta = 8m^2 + 8 > 0, y_1 + y_2 = -\frac{2m}{m^2 + 2}, y_1 y_2 = -\frac{1}{m^2 + 2}. \quad \dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$\therefore |AB| = \sqrt{1 + m^2} |y_1 - y_2| = \frac{2\sqrt{2}(m^2 + 1)}{m^2 + 2}. \quad \dots\dots 7 \text{ 分}$$

设圆 $x^2 + y^2 = 2$ 的圆心 O 到直线 l 的距离为 d , 则 $d = \frac{1}{\sqrt{m^2 + 1}}$.

$$\therefore |CD| = 2\sqrt{2 - d^2} = 2\sqrt{\frac{2m^2 + 1}{m^2 + 1}}. \quad \dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\therefore |AB| \cdot |CD|^2 = 4 \cdot \frac{2m^2 + 1}{m^2 + 1} \cdot \frac{2\sqrt{2}(m^2 + 1)}{m^2 + 2} = \frac{8\sqrt{2}(2m^2 + 1)}{m^2 + 2}. \quad \dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$\therefore |AB| \cdot |CD|^2 = 8\sqrt{2}.$$

$$\therefore \frac{8\sqrt{2}(2m^2 + 1)}{m^2 + 2} = 8\sqrt{2}. \quad \dots\dots 10 \text{ 分}$$

解得 $m = \pm 1$. 经验证 $m = \pm 1$ 符合题意. \dots\dots 11 \text{ 分}

故所求直线 l 的方程为 $x - y - 1 = 0$ 或 $x + y - 1 = 0$. \dots\dots 12 \text{ 分}

21. 解: (I) 当 $m = 1$ 时, $f(x) = x^2 - x - \ln x$.

$$\text{则 } f'(x) = 2x - 1 - \frac{1}{x} = \frac{2x^2 - x - 1}{x}, x > 0. \quad \dots\dots 1 \text{ 分}$$

$$\text{令 } f'(x) = 0, \text{ 解得 } x_1 = -\frac{1}{2} \text{ (舍去)}, x_2 = 1.$$

当 $x \in (0, 1)$ 时, $f'(x) < 0$. $\therefore f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减;

当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$. $\therefore f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增. \dots\dots 3 \text{ 分}

$\therefore f(x)_{\text{极小值}} = f(1) = 0$, 无极大值. \dots\dots 4 \text{ 分}

(II) $g(x) = x^2 - m \ln x$.

若 $g(x) > \frac{1}{x}$ 在 $(1, +\infty)$ 上恒成立, 即 $x^2 - m \ln x - \frac{1}{x} > 0$ 在 $(1, +\infty)$ 上恒成立.

构造函数 $G(x) = x^2 - m \ln x - \frac{1}{x}, x > 1$.

$$\text{则 } G'(x) = 2x - \frac{m}{x} + \frac{1}{x^2} = \frac{2x^3 - mx + 1}{x^2}. \quad \dots\dots 6 \text{ 分}$$

令 $H(x) = 2x^3 - mx + 1, x > 1$. $\therefore H'(x) = 6x^2 - m$.

(i) 若 $m \leq 6$, 可知 $H'(x) > 0$ 恒成立. $\therefore H(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增.

$$\therefore H(x) > H(1) = 3 - m.$$

① 当 $3 - m \geq 0$, 即 $0 < m \leq 3$ 时, $H(x) > 0$ 在 $(1, +\infty)$ 上恒成立, 即 $G'(x) > 0$ 在 $(1, +\infty)$ 上恒成立.

$\therefore G(x) > G(1) = 0$ 在 $(1, +\infty)$ 上恒成立.

$\therefore 0 < m \leq 3$ 满足条件. \dots\dots 9 \text{ 分}

②当 $3-m < 0$ 即 $3 < m \leq 6$ 时, $\because H(1) = 3-m < 0, H(2) = 17-2m > 0$,
 $\therefore$ 存在唯一的 $x_0 \in (1, 2)$, 使得 $H(x_0) = 0$.

当 $x \in (1, x_0)$ 时, $H(x) < 0$, 即 $G'(x) < 0$. $\therefore G(x)$ 在 $(1, x_0)$ 单调递减.

$\therefore G(x) < G(1) = 0$, 这与 $G(x) > 0$ 矛盾.10 分

(ii) 若 $m > 6$, 由 $H'(x) = 0$, 可得 $x_1 = -\sqrt{\frac{m}{6}}$ (舍去), $x_2 = \sqrt{\frac{m}{6}}$.

易知 $H(x)$ 在 $(1, \sqrt{\frac{m}{6}})$ 上单调递减.

$\therefore H(x) < H(1) = 3-m < 0$ 在 $(1, \sqrt{\frac{m}{6}})$ 上恒成立, 即 $G'(x) < 0$ 在 $(1, \sqrt{\frac{m}{6}})$ 上恒成立.

$\therefore G(x)$ 在 $(1, \sqrt{\frac{m}{6}})$ 上单调递减.

$\therefore G(x) < G(1) = 0$ 在 $(1, \sqrt{\frac{m}{6}})$ 上恒成立, 这与 $G(x) > 0$ 矛盾.11 分

综上, 实数 m 的取值范围为 $(0, 3]$12 分

22. 解: (I) 由 $x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta$, 可得直线 l 的直角坐标方程为 $x - y - 1 = 0$2 分

由曲线 C 的参数方程, 消去参数 m , 可得曲线 C 的普通方程为 $y^2 = 4x$4 分

(II) 易知点 $P(2, 1)$ 在直线 l 上, 直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x = 2 + \frac{\sqrt{2}}{2}t, \\ y = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}t \end{cases}$ (t 为参数).
6 分

将直线 l 的参数方程代入曲线 C 的普通方程, 并整理得 $t^2 - 2\sqrt{2}t - 14 = 0$(*)

设 t_1, t_2 是方程 (*) 的两根, 则有 $t_1 + t_2 = 2\sqrt{2}, t_1 t_2 = -14$7 分

$\therefore \frac{1}{|PM|} + \frac{1}{|PN|} = \frac{1}{|t_1|} + \frac{1}{|t_2|} = \frac{|t_1| + |t_2|}{|t_1||t_2|} = \frac{|t_1 - t_2|}{|t_1 t_2|} = \frac{\sqrt{(t_1 + t_2)^2 - 4t_1 t_2}}{|t_1 t_2|}$
 $= \frac{\sqrt{(2\sqrt{2})^2 + 4 \times 14}}{14} = \frac{4}{7}$10 分

23. 解: (I) 原不等式即 $|x-1| + |x+3| \geq 6$.

①当 $x \geq 1$ 时, 化简得 $2x + 2 \geq 6$. 解得 $x \geq 2$;

②当 $-3 < x < 1$ 时, 化简得 $4 \geq 6$. 此时无解;

③当 $x \leq -3$ 时, 化简得 $-2x - 2 \geq 6$. 解得 $x \leq -4$.

综上, 原不等式的解集为 $(-\infty, -4] \cup [2, +\infty)$4 分

(II)由题意 $f(x) = \begin{cases} 2x+2, & x \geq 1 \\ 4, & 0 < x < 1 \end{cases}$. 设方程 $f(x) = g(x)$ 两根为 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$.

①当 $x_2 > x_1 \geq 1$ 时, 方程 $-x^2 + 2ax = 2x + 2$ 等价于方程 $2a = x + \frac{2}{x} + 2$.

易知当 $a \in (\sqrt{2} + 1, \frac{5}{2}]$, 方程 $2a = x + \frac{2}{x} + 2$ 在 $(1, +\infty)$ 上有两个不相等的实数根.

此时方程 $-x^2 + 2ax = 4$ 在 $(0, 1)$ 上无解. $\therefore a \in (\sqrt{2} + 1, \frac{5}{2}]$ 满足条件.6 分

②当 $0 < x_1 < x_2 < 1$ 时, 方程 $-x^2 + 2ax = 4$ 等价于方程 $2a = x + \frac{4}{x}$.

此时方程 $2a = x + \frac{4}{x}$ 在 $(0, 1)$ 上显然没有两个不相等的实数根.7 分

③当 $0 < x_1 < 1 \leq x_2$ 时, 易知当 $a \in (\frac{5}{2}, +\infty)$, 方程 $2a = x + \frac{4}{x}$ 在 $(0, 1)$ 上有且只有一个实数根.

此时方程 $-x^2 + 2ax = 2x + 2$ 在 $[1, +\infty)$ 上也有一个实数根.

$\therefore a \in (\frac{5}{2}, +\infty)$ 满足条件.9 分

综上, 实数 a 的取值范围为 $(\sqrt{2} + 1, +\infty)$10 分